21 Séries numériques

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

A. Généralités

A.1. Série

Définition 21.1

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

- Le couple de suite $((u_n)_{n\geqslant n_0}, (S_n)_{n\geqslant n_0})$ est appelé **série de terme général u_n**.
- Pour tout $n \geqslant n_0$, S_n est appelé **somme partielle d'ordre n** de la série.
- La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée **suite des sommes partielles** de la série de terme général u_n.

Remarques

a. Attention à ne pas confondre la série de terme général u_n et la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$. Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est positive, on peut remarquer que la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante, mais il serait très maladroit de dire que la série de terme général u_n est croissante, car cela n'a pas de sens.

b. Pour parler de la série de terme général u_n, on écrit en général « la série $\sum u_n$ » ou aussi, parfois, « la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ », cette dernière notation ayant l'avantage de préciser le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

c. Dans la mesure où toute suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie à partir du rang n_0 peut se ramener à une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par changement d'indice (en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+n_0}$) et pour simplifier les notations, on suppose dans la suite du cours que : $n_0 = 0$.

A.2. Nature d'une série

Dans la suite de cette partie, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des somme partielle de la série $\sum u_n$.

Définition 21.2

i. On dit que la série $\sum u_n$ converge (ou est une **série convergente**) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de cette suite est notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée **somme de la série** $\sum u_n$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ii. On dit que la série $\sum u_n$ diverge (ou est une **série divergente**) lorsqu'elle ne converge pas.

Remarques

a. Déterminer la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

b. On dira que la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe dans le cas ou la série $\sum u_n$ converge.

c. On établira plus tard des résultats permettant d'étudier la nature d'une série simplement. Mais on utilisera le plus souvent la définition pour répondre à une question du type « déterminer la nature et la somme éventuelle de la série de terme général u_n ». Les résultats qui seront établis dans la suite ne permettent en général pas de calculer la somme de la série.

d. On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes. Autrement dit, si u et v sont deux suites pour lesquelles il existe un entier naturel p tel que $u_n = v_n$ lorsque $n \geqslant p$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

e. Attention à ne pas confondre les notations $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la première est une notation pour la série, tandis que la seconde n'a de sens que si la série converge et, dans ce cas, désigne la somme de la série (donc un réel, pas une série).

f. Attention à ne pas écrire d'égalité du type $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$ tant que la convergence de la série n'a pas été établie.

g. Comme on ne confond pas suite des sommes partielles et série, il ne faudra pas confondre somme d'une série et limite : si la série $\sum u_n$ converge et si sa somme vaut S, il serait donc maladroit d'écrire que « la série $\sum u_n$ converge vers S ».

Exercice 21.1 Étudier la nature et, en cas de convergence, déterminer la somme de la série de terme général u_n où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Exercice 21.2 En minorant $\frac{1}{n}$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est appelée **série harmonique**.

Théorème 21.3 ▶ Critère nécessaire de convergence

Si la suite u est telle que la série $\sum u_n$ converge, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Preuve On suppose que la série $\sum u_n$ converge. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Or, comme la série $\sum u_n$ converge, on a, en notant S sa somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$$

□

Remarques

a. Attention à ce théorème, car **sa réciproque est fausse !** Par exemple, on a vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, bien que son terme général converge vers 0.

b. Le principal intérêt de ce théorème réside dans sa contraposée, qui permettra parfois de démontrer simplement qu'une série diverge :

Proposition 21.4

Si la suite u ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 21.3 Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)$.

Proposition 21.5

Soient u et v deux suites réelles, λ un réel.

i. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \lambda u_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge et si $\lambda \neq 0$, alors la série $\sum \lambda u_n$ diverge.

iii. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum u_n + v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

iv. Si la série $\sum u_n$ converge et si la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Preuve

i. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, de somme S. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda S$$

ce qui prouve que la série $\sum \lambda u_n$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

ii. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et que $\lambda \neq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum \lambda u_n$ converge. Alors, d'après le point précédent, la série $\sum \frac{1}{\lambda} \times \lambda u_n$ converge, ce qui est absurde, donc la série $\sum \lambda u_n$ diverge.

iii. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, de sommes respectives U et V. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$$

et alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = U + V$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n + v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

iv. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum(u_n + v_n)$ converge. D'après les résultats précédents, on en déduit que la série $\sum((u_n + v_n) + (-u_n))$ converge, ce qui est absurde, donc la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

□

Remarques

a. Comme on peut vérifier facilement que la série de terme général 0 converge, ces propriétés permettent de montrer que l'ensemble des suites réelles u telles que la série $\sum u_n$ converge, muni de l'addition de deux suites et de la multiplication d'une suite par un réel, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, sur cet espace vectoriel, l'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

b. Attention : si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes deux divergentes, on ne peut rien dire quant à la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$. Pour s'en convaincre, on réfléchira à la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$ dans le cas où, d'une part, u et v sont constantes égales à 1 et, d'autre part, où u est constante égale à 1 et v constante égale à -1.

A.3. Reste d'une série convergente

Exercice 21.4 On suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

Pour tout entier naturel n, on appelle **reste d'ordre n de la série de terme général u_n** le réel R_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

A.4. Séries « télescopiques »

Exercice 21.5 La **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Remarques

a. Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il est très classique, donc il faut savoir le démontrer.

b. Dans la mesure où, dans ce chapitre, serons établis des résultats permettant d'étudier la nature d'une série, ils seront également utiles pour étudier la nature d'une suite : pour étudier la convergence ou la divergence de la suite u, on peut en effet étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 21.6 Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$.

B. Séries de référence

B.1. Séries de Riemann

Théorème 21.6

Soit α un réel. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Exercice 21.7 On se propose de démontrer le théorème 21.6.

1. Prouver que, si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \neq 1$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

(a) Justifier que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

(b) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

(c) On suppose que α appartient à $]0,1[$. Prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

(d) On suppose que α appartient à $]1,+\infty[$. Prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Remarque On verra plus tard que ce résultat sera particulièrement utile pour étudier la nature d'une série.

B.2. Séries géométriques

Théorème 21.7

Soit q un réel. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Exercice 21.8 Démontrer le théorème 21.7.

B.3. Séries géométriques « dérivées »

Théorème 21.8

Soit q un réel. Les séries $\sum n\, q^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si : $|q| < 1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Preuve

- On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nq^{n-1} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

On peut déjà remarquer que, si $|q| \geqslant 1$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc la suite u ne peut converger vers 0 et donc, d'après 21.3, la série $\sum u_n$ diverge si $|q| \geqslant 1$. On suppose maintenant que : $|q| < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction rationnelle $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[,\ f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Par ailleurs, comme $|q| < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge si $|q| < 1$ et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

- De même, on pose :

$$\forall n \geqslant 2,\ v_n = n(n-1)q^{n-2} \quad \text{et} \quad S''_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$$

On peut encore remarquer que, si $|q| \geqslant 1$, la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc la suite v ne peut converger vers 0 et donc, d'après 21.3, la série $\sum v_n$ diverge si $|q| \geqslant 1$. On suppose maintenant que : $|q| < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction rationnelle $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et on obtient, en dérivant deux fois :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{-n(n+1)x^{n-1}(1-x)^2 + 2[1-(n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^3}$$

et en particulier :

$$\forall n \geqslant 2,\ S''_n = \frac{-n(n+1)q^{n-1}(1-q)^2 + 2[1-(n+1)q^n + nq^{n+1}]}{(1-q)^3}$$

Par ailleurs, comme $|q| < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} nq^n = \lim_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S''_n = \frac{2}{(1-q)^3}$$

ce qui prouve que la série $\sum v_n$ converge si $|q| < 1$ et que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

Remarque En cas de doute sur la somme d'une série géométrique dérivée convergente, on pourra retenir que ce que l'on a démontré revient à dire que, dans le cas des séries géométriques, « la dérivée de la somme infinie est égale à la somme infinie des dérivées ». Cependant, il ne s'agit là que d'un moyen mnémotechnique et non d'un moyen de preuve, car on ne sait pas, avec les outils du programme, dériver une somme infinie.

B.4. Séries exponentielles

Théorème 21.9

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

C. Absolue convergence et semi-convergence

Dans cette partie, on considère une suite u de signe quelconque.

C.1. Absolue convergence

Définition 21.10

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou qu'elle converge absolument) si, et seulement si, la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 21.11

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, il existe deux suites v et w positives telles que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

Preuve On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad w_n = \max(-u_n, 0)$$

Les suites v et w sont positives par définition et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - w_n = \begin{cases} u_n - 0 = u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 - (-u_n) = u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

et donc, dans tous les cas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, on en déduit, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

□

C.2. Un critère suffisant de convergence

Théorème 21.12 ► Critère suffisant de convergence

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve

◇ Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. D'après 21.11, il existe deux suites v et w telles que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

On en déduit la convergence de la série $\sum u_n$ grâce à 21.5.

◇ Dans ce cas, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

c'est-à-dire :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

□

Remarques

a. Ce résultat, couplé à la partie précédente, est un résultat fondamental pour l'étude des séries dont le terme général n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang.

b. Attention, la réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, on verra en exercice que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ (série harmonique alternée) est convergente, mais pas absolument convergente.

c. Si la série $\sum u_n$ est convergente et si la série $\sum |u_n|$ est divergente, on dit que la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

Exercice 21.9 Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^3}$.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 21-1

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= 1 - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 1$$

ce qui prouve que la série $\sum \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ converge, de somme 1.

Correction de l'exercice 21-2

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction inverse, est décroissante sur cet intervalle, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]k, k+1[,\ \ln'(x) \leqslant \frac{1}{k}$$

et donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

On en déduit, en sommant ces inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'après le théorème de prolongement des inégalités, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

ce qui prouve que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 21-3

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} \ln(x) = \ln(2)$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right) = \ln(2)$$

ce qui prouve, d'après le critère nécessaire de convergence, que la série $\sum \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 21-4

On suppose que la série $\sum u_n$ converge, de somme S. Avec les notations de la définition, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

Correction de l'exercice 21-5

On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_{n+1} - u_0
\end{aligned}$$

Dès lors, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc si et seulement si la suite u converge et, dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0$$

ce qui prouve le théorème.

Correction de l'exercice 21-6

On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)&=\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)\\&=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Comme la suite $\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers 0), on en déduit que la série $\sum\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+n}\right)$ converge et que :

$$\sum\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$$

Correction de l'exercice 21-7

1. On a déjà vu en exemple que la série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha=1$. On peut également remarquer que, si $\alpha=0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 1 et que, si $\alpha<0$, cette suite diverge vers $+\infty$. Ainsi, si $\alpha\leqslant 0$, la série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le critère nécessaire de convergence 21.3.
2. 1. On peut déjà remarquer que :

   $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_{n+1}-S_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\\&=\frac{1}{(n+1)^\alpha}\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

   donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée.
   2. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $\alpha>0$), donc :

   $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[k,k+1],\ \frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\frac{1}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}$$

   et alors, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur le segment $[k,k+1]$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ (et $k\leqslant k+1$) :

   $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{(k+1)^\alpha}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha}$$

   c'est-à-dire :

   $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}$$

   3. On a donc :

   $$\forall k\geqslant 2,\ \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

   En sommant ces inégalités, on en déduit, avec la relation de Chasles :

   $$\forall n\geqslant 2,\ \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_1^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc :

$$\forall n \geqslant 2,\ 1+\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1+\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n}$$

soit finalement :

$$\forall n \geqslant 2,\ 1+\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1+\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}. \tag{21.1}$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, on a : $1-\alpha > 0$ et alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=+\infty$$

et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

4. Si $\alpha > 1$, on a : $1-\alpha < 0$ et alors, d'après (21.1) :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2,\ S_n &\leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\\ &\leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

Dans ce cas, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée et, d'après la remarque initiale, elle est donc convergente, ce qui prouve que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Correction de l'exercice 21-8

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

On remarque tout d'abord que, si $q=1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = n+1$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

On suppose maintenant que : $q \neq 1$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc (comme dans ce cas $q\neq 1$) si et seulement si q appartient à $]-1,1[$. Finalement, la série $\sum q^n$ converge si et seulement si : $|q|<1$. De plus, dans ce cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

Correction de l'exercice 21-9

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| = \frac{1}{n^3}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente (car $3>1$) donc la série $\sum |u_n|$ est convergente. Cela signifie que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Sommaire

Séries numériques 1

A. Généralités 1
A.1. Série 1
A.2. Nature d'une série 1
A.3. Reste d'une série convergente 4
A.4. Séries « télescopiques » 4
B. Séries de référence 5
B.1. Séries de Riemann 5
B.2. Séries géométriques 5
B.3. Séries géométriques « dérivées » 5
B.4. Séries exponentielles 7
C. Absolue convergence et semi-convergence 7
C.1. Absolue convergence 7
C.2. Un critère suffisant de convergence 8
D. Correction des exercices 8