20 Systèmes différentiels

ECG Maths Appliquées
Semestre 4

A. Généralités

Définition 20.1

On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

dont les inconnues $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La matrice du système est la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et le système peut donc aussi s'écrire $X' = AX$ (ou $X'(t) = AX(t)$) où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Résoudre le système, c'est déterminer les fonctions dérivables $x_1, x_2, \dots, x_n$ vérifiant le système.

Exemple 20.1 Le système $\begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ est un système différentiel admettant pour solutions les couples (x_1, x_2) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) = \mu \mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

Remarque Dans toute la suite de ce cours, A désigne une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 20.2 ▶ Problème de Cauchy

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle $X' = AX$ admet une unique solution X telle que $X(t_0) = X_0$.

Théorème 20.3

On suppose que la matrice A est diagonalisable et on considère une base $(U_1, \ldots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Le système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$ admet une infinité de solutions, qui sont les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} U_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} U_n$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels quelconques.

Exercice 20.1

1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \end{cases}$.
2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$.

Proposition 20.4

Soit (a, b) un couple de réels. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Une fonction x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel $X' = AX$.

Exercice 20.2 Démontrer la proposition 20.4.

Exercice 20.3

1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -10x_1 + 7x_2 \end{cases}$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 10y = 0$.

B. Trajectoires des solutions d'un système différentiel

Définition 20.5

On appelle trajectoire du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution du système.

Définition 20.6

On appelle état (ou solution) d'équilibre du système différentiel $X' = AX$ toute solution $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_1, \ldots, x_n$ soient des fonctions constantes.

Remarque Les états d'équilibre du système différentiel $X' = AX$ sont donc les solutions de l'équation $AX = 0$. Par conséquent, si A est une matrice inversible, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(0, \ldots, 0)$ est l'unique état d'équilibre du système différentiel $X' = AX$.

Définition 20.7

On dit qu'une trajectoire $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ du système différentiel $X' = AX$ est convergente si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction x_i admet une limite finie ℓ_i en $+\infty$; on dit alors que la trajectoire converge vers $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$.

Théorème 20.8

On suppose que la matrice A est diagonalisable.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un état d'équilibre, appelé état stable.
- Si A possède une valeur propre strictement positive, le système différentiel possède au moins une trajectoire divergente.

Exercice 20.4 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer $A^2 - A$. En déduire les valeurs propres de A.

(c) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

3. Déterminer les solutions d'équilibre du système différentiel (S).
4. Les trajectoires sont-elles convergentes ?

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 20-1

1. Le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \end{cases}$ s'écrit matriciellement $X' = AX$ où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux ; ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

En particulier A est une matrice carrée d'ordre 2 admettant deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

De plus on a, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AU = U &\iff \begin{cases} x + y = x \\ 2y = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

De même on a, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AU = 2U &\iff \begin{cases} x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, ce qui nous permet de conclure que l'ensemble des solutions du système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \end{cases}$ est l'ensemble des couples (x_1, x_2) de fonctions pour lesquelles il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$$

c'est-à-dire tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu \mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) = \mu \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

2. Le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ s'écrit matriciellement $X' = AX$ où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. De plus on a :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

et :

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit que 3 et -1 sont valeurs propres de A. Or A est une matrice carrée d'ordre 2, donc elle ne peut avoir plus de deux valeurs propres distinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 2 (car A est diagonalisable). On en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(A)=\{-1,3\}$$

et que les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres -1 et 3 sont respectivement :

$$E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\quad\text{et}\quad E_3(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, ce qui nous permet de conclure que l'ensemble des solutions du système différentiel $\begin{cases}x_1'(t)=x_1(t)+2x_2(t)\\x_2'(t)=2x_1(t)+x_2(t)\end{cases}$ est l'ensemble des couples (x_1,x_2) de fonctions pour lesquelles il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}$$

c'est-à-dire tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x_1(t)=\lambda\mathrm{e}^{-t}+\mu\mathrm{e}^{3t}\\x_2(t)=-\lambda\mathrm{e}^{-t}+\mu\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$$

Correction de l'exercice 20-2

Soit x une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$x''+ax'+bx=0\iff\begin{cases}x'=x'\\(x')'=-bx-ax'\end{cases}$$

soit encore, en notant $(x_1,x_2)=(x,x')$:

$$x''+ax'+bx=0\iff\begin{cases}x_1'=0\cdot x_1+1\cdot x_2\\x_2'=-bx_1-ax_2\end{cases}$$

ce qui prouve la proposition 20.4.

Correction de l'exercice 20-3

1. La matrice du système différentiel $\begin{cases}x_1'=x_2\\x_2'=-10x_1+7x_2\end{cases}$ est :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-10&7\end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre 2, donc on sait que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(A)&=\{\lambda\in\mathbb{R},\ A-\lambda\mathrm{I}_2\text{ n'est pas inversible}\}\\&=\{\lambda\in\mathbb{R},\ -\lambda(7-\lambda)+10=0\}\\&=\{\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda^2-7\lambda+10=0\}\\&=\{2,5\}\end{aligned}$$

En particulier A est une matrice carrée d'ordre 2 admettant deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

De plus on a, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AU = 2U &\iff \begin{cases} y = 2x \\ -10x + 7y = 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

De même on a, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AU = 5U &\iff \begin{cases} y = 5x \\ -10x + 7y = 5y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 5x \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5 est :

$$E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, ce qui nous permet de conclure que l'ensemble des solutions du système différentiel $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -10x_1 + 7x_2 \end{cases}$ est l'ensemble des couples (x_1, x_2) de fonctions pour lesquelles il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$$

c'est-à-dire tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{5t} \\ x_2(t) = 2\lambda \mathrm{e}^{2t} + 5\mu \mathrm{e}^{5t} \end{cases}$$

2. On sait qu'une fonction x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 10y = 0$ si et seulement si le couple (x, x') est solution du système différentiel $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -10x_1 + 7x_2 \end{cases}$ donc, d'après le résultat de la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 10y = 0$ est :

$$\left\{ x : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{5t} \end{array} \right. , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Correction de l'exercice 20-4

1. (a) A est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

   (b) ► On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

donc :

$$A^2 - A = 2\mathrm{I}_3$$

► On en déduit que le polynôme $P : x \mapsto x^2 - x - 2$ est un polynôme annulateur de A, et donc, comme les racines de P sont -1 et 2, que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 2\}$$

De plus A est diagonalisable donc elle admet au moins une valeur propre. En outre, toujours parce que A est diagonalisable, si elle avait une unique valeur propre λ, il existerait une matrice P inversible telle que $A = P\,(\lambda \mathrm{I}_3)\,P^{-1}$, donc on aurait : $A = \lambda \mathrm{I}_3$, ce qui est faux. On en déduit que A admet au moins deux valeurs propres, ce qui suffit pour conclure

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$$

(c) ► Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff \begin{cases} x - y - z = -x \\ -x + y - z = -y \\ -x - y + z = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \end{aligned}$$

On en déduit que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est :

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $E_{-1}(A)$.

► Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \begin{cases} x - y - z = 2x \\ -x + y - z = 2y \\ -x - y + z = 2z \end{cases} \\ &\iff -x - y - z = 0 \\ &\iff z = -x - y \end{aligned}$$

On en déduit que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre et constitue donc une base de $E_2(A)$.

2. La matrice A est la matrice du système différentiel étudié. De plus elle est diagonalisable et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, donc l'ensemble des

solutions du système différentiel est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) de fonctions telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$$

où (α, β, γ) est un triplet de réels ; c'est-à-dire l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) de fonctions telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} + \beta \mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} + \gamma \mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} - \beta \mathrm{e}^{2t} - \gamma \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

où (α, β, γ) est un triplet de réels.

3. 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible et le triplet $(0, 0, 0)$ est donc la seule solution d'équilibre du système.
4. A admet une valeur propre strictement positive, donc il existe des trajectoires divergentes.

Sommaire

Systèmes différentiels 1

A. Généralités 1
B. Trajectoires des solutions d'un système différentiel 2
C. Correction des exercices 4