19

Équations différentielles à coefficients constants

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

A. Généralités

Définition 19.1

On appelle équation différentielle toute équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir sa dérivée (ou ses dérivées successives).
Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est chercher les fonctions définies sur I solutions de l'équation.

Exemples 19.1

a. L'équation $y' - y = 0$ est une équation différentielle homogène et la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - f(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t = 0$$

b. L'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est une équation différentielle homogène et la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$; en effet g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + 2g'(t) + g(t) = \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} = 0$$

c. L'équation $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$ est une équation différentielle dont le second membre est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$. La fonction $h : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$; h est en effet dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \left(\mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}\right) + t\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}$$

Remarques

a. La variable dont dépend la fonction peut ne pas apparaître dans l'équation (comme dans le premier exemple précédent, $y' - y = 0$) ou apparaître de manière implicite (comme dans le cas de la dernière équation, $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$, qui pourrait aussi être notée $y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{-t}$). On n'oubliera pas cependant que l'inconnue de l'équation différentielle est bien la fonction (ici y) et non la variable t.

b. Par convention, quand on envisage une équation différentielle, on écrit toujours dans le membre de gauche les termes faisant intervenir la fonction inconnue y et dans le membre de droite, appelé *second membre*, les termes de dépendant pas de y.

c. Quand le second membre est égal à 0, on dit que l'équation différentielle est *homogène*.

B. Équations du premier ordre à coefficients constants

Dans tout ce paragraphe, on considère un réel a, un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction b définie sur I.

Définition 19.2

On appelle équation différentielle d'ordre un à coefficients constants toute équation différentielle de la forme $y' + ay = b(t)$ où :

- l'inconnue est la fonction y, dérivable sur I,
- a est une constante réelle,
- b est une fonction définie sur I.

L'équation différentielle $y' + ay = 0$ est appelée équation homogène associée à l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$.

Proposition 19.3

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$ est stable par combinaison linéaire ; autrement dit, si y_1 et y_2 sont deux solutions de cette équation différentielle sur I alors, pour tous réels α et β, $\alpha y_1 + \beta y_2$ est encore solution de l'équation différentielle homogène sur I.

Exercice 19.1 Démontrer la proposition 19.3.

Théorème 19.4

L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sur I est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at} \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 19.2

1. Soit y une solution de l'équation $y' + ay = 0$ sur I.
   (a) Étudier la fonction $t \mapsto y(t)\,\mathrm{e}^{at}$.
   (b) En déduire l'existence d'un réel λ tel que : $\forall t \in I,\ y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-at}$.
2. En déduire le théorème 19.4.

Exercice 19.3 Montrer qu'il existe une unique fonction y, que l'on précisera, vérifiant : $y' - 4y = 0$ et $y(0) = 1$.

Théorème 19.5

Soit y_0 une solution de l'équation $y' + ay = b(t)$. L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = b(t)$ est l'ensemble des fonctions $y_0 + y$ où y est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$; autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = b(t)$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y_0(t) + \lambda \mathrm{e}^{-at} \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$, on procédera en général ainsi :

- on commence par résoudre l'équation différentielle $y' + ay = 0$ à l'aide du théorème 19.4,
- on cherche une solution particulière y_0 à l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$ (si cette solution particulière n'est pas « évidente », la recherche sera le plus souvent guidée),
- on conclut avec le théorème 19.5.

Exercice 19.4 Démontrer le théorème 19.5.

Exercice 19.5 On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que la fonction $t \mapsto \alpha t + \beta$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 19.6

Si a est un réel non nul et si b est une fonction constante, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{b}{a} + \lambda \mathrm{e}^{-at} \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Proposition 19.7 ▶ Principe de superposition

Soit b_1 et b_2 deux fonctions définies sur I, α_1 et α_2 deux réels.
Si y_1 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1(t)$ et si y_2 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2(t)$ alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$.

Exercice 19.6 Démontrer la proposition 19.7.

Exercice 19.7

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 1$.
2. (a) Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^t$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^t$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^t$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^t + 2$.

C. Équations du second ordre

Dans tout ce paragraphe, on considère deux réels a et b, un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction c définie sur I.

Définition 19.8

On appelle équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants toute équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = c(t)$ où :

- l'inconnue est la fonction y, deux fois dérivable sur I,
- a et b sont deux constantes réelles,
- c est une fonction définie sur I.

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est appelée *équation homogène associée* à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r dans $\mathbb{R}$, est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$.

Proposition 19.9

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$ est stable par combinaison linéaire ; autrement dit, si y_1 et y_2 sont deux solutions de cette équation différentielle alors, pour tous réels α et β, $\alpha y_1 + \beta y_2$ est encore solution de l'équation différentielle homogène.

Théorème 19.10

Considérons l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ associée à l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$.

- Si l'équation $r^2+ar+b=0$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 (*i.e.* si $a^2-4b>0$) alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y''+ay'+by=0$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array} \right. , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Si l'équation $r^2+ar+b=0$ admet une unique solution réelle r (*i.e.* si $a^2-4b=0$) alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y''+ay'+by=0$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{rt} \end{array} \right. , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 19.8

1. Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y''+3y'+2y=0$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 19.11

Soit y_0 une solution de l'équation $y''+ay'+by=c(t)$.
L'ensemble des solutions de l'équation $y''+ay'+by=c(t)$ est l'ensemble des fonctions y_0+y où y est solution de l'équation différentielle homogène $y''+ay'+by=0$.

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation différentielle $y''+ay'+by=c(t)$, on procédera en général ainsi :

- on commence par résoudre l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ à l'aide du théorème 19.10,
- on cherche une solution particulière y_0 à l'équation différentielle $y''+ay'+by=c(t)$ (si cette solution particulière n'est pas « évidente », la recherche sera le plus souvent guidée),
- on conclut avec le théorème 19.11.

Exercice 19.9

1. Résoudre l'équation différentielle $y''-4y'+4y=1$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $y''-y=0$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer un réel α tel que la fonction $t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{2t}$ soit solution de l'équation différentielle $y''-y=\mathrm{e}^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y''-y=\mathrm{e}^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 19.12

Si c est une fonction constante, alors la fonction constante égale à $\frac{c}{b}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y''+ay'+by=c$.

Proposition 19.13 ▶ Principe de superposition

Soit c_1 et c_2 deux fonctions définies sur I, α_1 et α_2 deux réels. Si y_1 est solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=c_1(t)$ et si y_2 est solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=c_2(t)$ alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=\alpha_1 c_1(t)+\alpha_2 c_2(t)$.

Exercice 19.10

1. Déterminer une fonction affine solution de l'équation différentielle $y''-y=t$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y''-y=3\mathrm{e}^{2t}-2t$.

D. Trajectoires des solutions d'une équation différentielle

Dans ce paragraphe, on considère une équation différentielle (ED) d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.

Définition 19.14

Si y est une solution de l'équation (ED), le graphe de y est aussi appelé *trajectoire* de y : c'est l'ensemble $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$.

Théorème 19.15 ▶ Problème de Cauchy

Soit t_0 un élément de I et y_0 un réel.
Il existe une unique solution y de l'équation différentielle (ED) telle que $y(t_0) = y_0$; autrement dit, il existe une unique solution y dont la trajectoire contient le point (t_0, y_0).

Définition 19.16 ▶ État d'équilibre

Les solutions constantes de l'équation (ED), s'il en existe, sont appelées *états d'équilibres* ou *solutions d'équilibre* de l'équation différentielle.
Si y est une solution d'équilibre de (ED), sa trajectoire est appelée *trajectoire d'équilibre* de l'équation différentielle.

Définition 19.17

On suppose que I est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$.
Si y est une solution de l'équation (ED), on dit que la trajectoire $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$ est *convergente* si $y(t)$ a une limite finie y^* lorsque t tend vers $+\infty$. Le cas échéant, on dit que la trajectoire $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$ converge vers $\{(t, y^*),\ t \in I\}$.

Remarque On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge, elle converge toujours vers une trajectoire d'équilibre.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 19-1

Soit y_1, y_2 deux solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$ et α, β deux réels.
y_1 et y_2 sont dérivables sur I donc $f = \alpha y_1 + \beta y_2$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t)$$

d'où :

$$\forall t \in I,\ f'(t) + af(t) = \alpha\left[y_1'(t) + ay_1(t)\right] + \beta\left[y_2'(t) + ay_2(t)\right]$$

donc, comme y_1 et y_2 sont solutions de l'équation $y' + ay = 0$:

$$\forall t \in I,\ f'(t) + af(t) = 0$$

donc f est solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.

Correction de l'exercice 19-2

1. (a) y est dérivable sur I donc $f : t \mapsto y(t)\,\mathrm{e}^{at}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = y'(t)\,\mathrm{e}^{at} + ay(t)\,\mathrm{e}^{at}$$

donc, comme $y' = -ay$:

$$\forall t \in I,\ f'(t) = 0$$

Ainsi la fonction $f : t \mapsto y(t)\,\mathrm{e}^{at}$ est constante sur I.

(b) On en déduit qu'il existe λ tel que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = \lambda$$

et alors :

$$\forall t \in I,\ y(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-at} = \lambda\,\mathrm{e}^{-at}$$

2. D'après le résultat précédent, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ est inclus dans

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{-at} \end{array} \right. \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-at}$ est dérivable sur I et on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ y'(t) + ay(t) &= -a\lambda\,\mathrm{e}^{-at} + a\lambda\,\mathrm{e}^{-at} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc y est solution de l'équation $y' = ay$, ce qui prouve l'égalité attendue par double inclusion.

Correction de l'exercice 19-3

L'ensemble des solutions de l'équation $y' - 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{4t} \end{array} \right. ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, en notant $y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{4t}$:

$$y(0) = 1 \iff \lambda = 1$$

donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{4t}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y' - 4y = 0$ et $y(0) = 1$.

Correction de l'exercice 19-4

Comme on sait que y_0 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b(t)$, on a, pour toute fonction y dérivable sur I :

$$\begin{aligned} y' + ay = b(t) &\iff y' + ay = y_0' + ay_0 \\ &\iff y' - y_0' + a\,(y - y_0) = 0 \\ &\iff (y - y_0)' + a\,(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

donc, d'après 19.4 :

$$\begin{aligned} y' + ay = b(t) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ (y - y_0)(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-at} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = y_0(t) + \lambda\,\mathrm{e}^{-at} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19-5

1. Soit α et β deux réels. La fonction $f : t \mapsto \alpha t + \beta$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - 2f(t) = 2t + 1 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ -2\alpha t + (\alpha - 2\beta) = 2t + 1$$

d'où, par identification des coefficients de fonctions polynômes :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - 2f(t) = 2t + 1 &\iff \begin{cases} -2\alpha = 2 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $f : t \mapsto -t - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = 2t + 1$.

2. L'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t} \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On en déduit, avec le résultat de la question précédente et le théorème 19.5, que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 2t + 1$ est l'ensemble des fonctions y pour lesquelles il existe un réel λ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ y(t) = -t - 1 + \lambda \, e^{2t}$$

Correction de l'exercice 19-6

Supposons que y_1 soit solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1(t)$ et que y_2 soit solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2(t)$.
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \ (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'(t) + a\,(y_1 + \alpha_2 y_2)\,(t) &= \alpha_1 \left[y_1'(t) + a y_1(t)\right] + \alpha_2 \left[y_2'(t) + a y_2(t)\right] \\ &= \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t) \end{aligned}$$

donc $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$.

Correction de l'exercice 19-7

1. La fonction $t \mapsto 1$ est clairement solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$. De plus l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t} \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 1$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \lambda e^{-t} \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2} e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) = \frac{1}{2} e^t$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) + f(t) = e^t$$

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = e^t$.

(b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t} \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

donc, d'après le résultat de la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = e^t$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2} e^t + \lambda e^{-t} \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3. D'après les résultats précédents et le principe de superposition, on peut maintenant affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = e^t + 2$ est :

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2} e^t + \lambda e^{-t} + 2 \end{array} \right., \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'exercice 19-8

1. L'équation différentielle $y''+2y'+y=0$ a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$; cette dernière admet une unique solution réelle, qui est -1, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

2. L'équation différentielle $y''+3y'+2y=0$ a pour équation caractéristique $r^2+3r+2=0$; cette dernière admet deux solutions réelles, qui sont -1 et -2, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+3y'+2y=0$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{-t}+\mu\mathrm{e}^{-2t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Correction de l'exercice 19-9

1. La fonction $t\mapsto \frac{1}{4}$ est clairement solution de l'équation différentielle $y''-4y'+4y=1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus l'équation différentielle $y''-4y'+4y=0$ a pour équation caractéristique $r^2-4r+4=0$; cette dernière admet une unique solution réelle, qui est 2, donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-4y'+4y=0$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-4y'+4y=1$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{4}+(\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

2. (a) L'équation différentielle $y''-y=0$ a pour équation caractéristique $r^2-1=0$. Cette dernière admettant deux solutions réelles (-1 et 1), on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-y=0$ sur $\mathbb{R}$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
(b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction $f : t\mapsto \alpha\mathrm{e}^{2t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)=2\alpha\mathrm{e}^{2t} \quad\text{et}\quad f''(t)=4\alpha\mathrm{e}^{2t}$$
On a donc :
$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ f''(t)-f(t)=\mathrm{e}^{2t} &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ 3\alpha\mathrm{e}^{2t}=\mathrm{e}^{2t}\\ &\iff \alpha=\frac{1}{3}\end{aligned}$$
donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $y''-y=\mathrm{e}^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.
(c) On déduit des questions précédentes que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-y=\mathrm{e}^{2t}$ sur $\mathbb{R}$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2t}+\lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Correction de l'exercice 19-10

1. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. La fonction $f : t\mapsto \alpha t+\beta$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, et on a :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)=\alpha \quad\text{et}\quad f''(t)=0$$
donc f est solution de l'équation différentielle $y''-y=t$ si et seulement si $-f(t)=t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Ainsi la fonction $f : t\mapsto -t$ est solution de l'équation différentielle $y''-y=t$.

2. Avec le résultats précédent, celui de l'exercice 16-9 et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{2t}+2t$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y''-y=3\mathrm{e}^{2t}-2t$. De plus on a donné dans l'exercice 16-9 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée $y''-y=0$, ce qui nous permet maintenant de conclure que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-y=3\mathrm{e}^{2t}-2t$ est :
$$\left\{y : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t}+\lambda\mathrm{e}^{t}+\mu\mathrm{e}^{-t}+2t \end{array}\right. ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Sommaire