18 Comparaisons de fonctions

ECG Maths Appliquées
Concours 2023

A. Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Dans cette partie, et sauf mention contraire, a désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur un voisinage de a, éventuellement privé de a.

A.1. Fonction négligeable devant une autre

Définition 18.1

On dit qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} \circ(g)$.

Remarques

a. Si f est négligeable devant g en a, on dit aussi que g est prépondérante sur f en a.

b. L'égalité « $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ » se lit « f(x) est un petit o de $g(x)$ quand x est au voisinage de a ».

c. En particulier, dire que $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(1)$ équivaut à dire que f tend vers 0 en a.

d. En pratique, il est rare que l'on doive démontrer dans un problème qu'une fonction est négligeable devant une autre. En revanche, on utilise fréquemment les négligeabilités de référence (voir après).

e. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une négligeabilité en a^- ou en a^+ lorsque a est un réel.

f. De la définition, on déduit de manière immédiate les deux propositions suivantes :

Proposition 18.2

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarques

a. Attention. Même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

b. On en déduit, grâce aux croissances comparées de référence (dont une preuve est proposée dans le chapitre 17) :

Proposition 18.3 ► Négligeabilités de référence en $+\infty$

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a < b$, alors : $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$

ii. $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

iii. $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$

iv. $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

Proposition 18.4 ► Négligeabilités de référence en 0

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a > b$, alors : $x^a \underset{0}{=} \circ(x^b)$

ii. $(\ln(x))^a \underset{0}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^b}\right)$

Proposition 18.5

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f \underset{a}{=} \circ(h)$.

ii. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $i \underset{a}{=} \circ(j)$, alors : $f \times i \underset{a}{=} \circ(g \times j)$.

iii. Si $f \underset{a}{=} \circ(h)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f + g \underset{a}{=} \circ(h)$.

iv. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$, alors : $f \times h \underset{a}{=} \circ(g \times h)$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Comme les erreurs sont fréquentes lors d'opérations avec des « petit o », il peut être préférable d'éviter d'utiliser cette notation dans les calculs, préférant la notation explicite $g(x)\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de limite nulle en a à la notation $\circ(g)$.

A.2. Fonctions équivalentes

Définition 18.6

On dit qu'une fonction f est équivalente à une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\,h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice 18.1 Prouver que : $x^2 - 2x + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

Remarques

a. La relation « $f \underset{a}{\sim} g$ » se lit « f est équivalente à g au voisinage de a ».

b. Attention, contrairement à ce que l'on pourrait croire, deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point a ne sont pas nécessairement à peu près égales au voisinage de ce point. On peut juste dire qu'elles ont le même comportement, ou que leurs courbes représentatives ont la même allure au voisinage de a. Par exemple, on peut vérifier que $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$; pourtant $(x^2 + x) - x^2 = x$ n'est pas proche de 0 au voisinage de $+\infty$.

c. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une équivalence en a^- ou en a^+ si $a \in \mathbb{R}$.

d. De la définition, on déduit de manière immédiate les propositions et théorèmes suivants :

Proposition 18.7

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque Attention. Encore une fois, même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

Théorème 18.8

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

Remarque Ce résultat est un des principaux résultats de ce paragraphe : pour déterminer la limite d'une fonction en un point, il suffit donc d'en déterminer un équivalent simple.

Exemple 18.1 Comme on a établi que $x^2 - 2x + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Proposition 18.9

Si f et g sont deux fonctions équivalentes en a, il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Exercice 18.2 Démontrer la propositoion 18.9.

Théorème 18.10

Si ℓ est un réel **non nul** et si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 18.7.

b. Attention : il est fondamental de s'assurer que ℓ est un réel non nul pour dire qu'une fonction tendant vers ℓ en a est équivalente à ℓ en a. En effet, compte tenu de la définition, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, il existe une fonction h tendant vers 1 en a telle que, quand x est au voisinage de a :

$$f(x) = 0 \times h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1.$$

Par conséquent, seules les fonctions constantes nulles au voisinage de a sont équivalentes à la fonction nulle.

Proposition 18.11

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a :

$$f \underset{a}{=} \circ(g) \Rightarrow f + g \underset{a}{\sim} g$$

Preuve On suppose que : $f \underset{a}{=} \circ(g)$. Il existe alors une fonction ε tendant vers 0 en a et un voisinage V_a de a tels que :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) + g(x) = g(x)\underbrace{[1 + \varepsilon(x)]}_{h(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

donc :

$$f + g \underset{a}{\sim} g$$

□

Remarque On déduit de cette proposition, de 18.3 et de 18.4 le résultat fondamental suivant :

Proposition 18.12

Une fonction polynôme non nulle est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ à son monôme de plus haut degré et en 0 à son monôme de plus base degré.

Autrement dit, si (n, p) est un couple d'entiers naturels tel que $p < n$ et si $P : x \mapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynôme telle que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n, \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x \to -\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p$$

Proposition 18.13

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.

ii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} j$, alors : $f \times i \underset{a}{\sim} g \times j$.

iii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a : $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

iv. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

v. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g sont strictement positives au voisinage de a, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Il n'est pas possible de sommer des équivalents, car le résultat n'est pas correct en général. Par exemple, on a :

$$x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x \quad \text{et} \quad -x \underset{x \to +\infty}{\sim} -x$$

mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) + (-x) = 1$ et 1 n'est pas équivalent à $x + (-x) = 0$ au voisinage de $+\infty$ (ni ailleurs). Pour déterminer un équivalent d'une somme, on pourra chercher à factoriser le terme prépondérant ou utiliser la définition.

Proposition 18.14 ▶ Équivalents de référence

Soit α un réel quelconque.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Exercice 18.3 On se propose de démontrer ces équivalents.

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. À quelle condition f est-elle dérivable en a ?
2. En déduire les équivalents de référence.

B. Développements limités

Dans cette partie, et sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a est un élément de I.

B.1. Généralités

Définition 18.15

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a s'il existe une famille $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels et une fonction ε définie sur I telles que :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n\,\varepsilon(x) = \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + \cdots + \alpha_n\,(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x)$$

et :

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

autrement dit s'il existe une famille $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels telle que :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

Remarque Les développements limités ne sont au programme de la voie économique que pour $n \in \{0,1,2\}$.

Théorème 18.16 ▶ Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \{0,1,2\}$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en a et on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \circ((x-a)^n)$$

Plus précisément :

- Si f est continue sur I alors f admet un développement limité à l'ordre 0 en a et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \circ(x-a)$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)\,(x-a) + \circ(x-a)$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en a et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 + \circ((x-a)^2)$$

Remarques

a. La formule de Taylor-Young donne une approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un point. Elle sera donc particulièrement utile dans les questions de recherche de limite ou d'équivalent.

b. On dit souvent que la formule de Taylor-Young est locale. Cela ne signifie pas qu'elle n'est pas vraie lorsque x est « loin » de a, mais qu'elle n'a d'intérêt que lorsque x est « proche » de a (car le reste est alors proche de 0).

Exercice 18.4 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, a un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

1. Prouver que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que g est dérivable en a et calculer $g'(a)$.

Exercice 18.5 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et a un réels tel que : $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. En utilisant la formule de Taylor-Young, démontrer que $f(a)$ est un minimum local de f.

Proposition 18.17

- Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a et si celui-ci est :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + \circ(x-a)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre 0 en a et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \circ(1)$$

- Si f admet un développement limité à l'ordre 2 en a et si celui-ci est :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + \alpha_2\,(x-a)^2 + \circ((x-a)^2)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en a et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1\,(x-a) + \circ(x-a)$$

B.2. Développements limités usuels en 0

Le lecteur est invité à retrouver les développements limités qui suivent en utilisant la formule de Taylor-Young.

Théorème 18.18

La fonction exponentielle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et :

$$\mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

Théorème 18.19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

Théorème 18.20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 et :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \circ(x^2)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \circ(x^2)$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^\alpha \underset{0}{1} + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \circ(x^2)$$

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 18-1

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 - 2x + \frac{1}{x} = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

De plus, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

ce qui nous permet de conclure :

$$x^2 - 2x + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$$

Correction de l'exercice 18-2

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et on distingue les cas selon que a est réel ou non.

- On suppose que $a = +\infty$ (le cas où $a = -\infty$ se traite de manière analogue). Il existe alors une fonction h tendant vers 1 en $+\infty$ et un réel M tels que :

  $$\forall x \geqslant M,\ f(x) = g(x)h(x)$$

  De plus, comme h tend vers 1 en $+\infty$, il existe un réel A' tel que :

  $$\forall x \geqslant A',\ h(x) > 0$$

  Dès lors, en notant $A'' = \max(A, A')$, on a :

  $$\forall x \geqslant A'',\ f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad h(x) > 0$$

  donc f et g sont de même signe sur $[A'', +\infty[$.
- On suppose que a est réel et que f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (les autres cas se traitant de manière analogue). Il existe alors une fonction h tendant vers 1 en a et un réel α appartenant à $]0, \varepsilon[$ tels que :

  $$\forall x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[,\ f(x) = g(x)h(x)$$

  De plus, comme h tend vers 1 en a, il existe un réel α' tel que :

  $$\forall x \in \left]a-\alpha', a+\alpha'\right[,\ h(x) > 0$$

Dès lors, en notant $\alpha'' = \max(\alpha, \alpha')$, on a :

$$\forall x \in]a-\alpha'', a+\alpha''[,\ f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad h(x) > 0$$

donc f et g sont de même signe sur $]a-\alpha'', a+\alpha''[$.

Correction de l'exercice 18-3

1. f est dérivable en a si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a et dans ce cas :
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
2. • La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x-0} = \exp'(0) = 1$$
   • De même la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$
   donc :
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = 1$$
   soit encore :
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x))}{x} = 1$$
   • Si $\alpha = 0$, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est constante nulle, donc l'équivalent est immédiat. Par ailleurs, si $\alpha \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a :
$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$$
   d'où :
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$
   On en déduit, si $\alpha \neq 0$:
$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \alpha$$
   donc :
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Correction de l'exercice 18-4

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, comme f est dérivable en a, on a :
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = g(a)$$
   donc :
$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$
   Ainsi g est aussi continue en a, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)-(x-a)\,f'(a)}{(x-a)^2}$$
   De plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Young :
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \circ((x-a)^2)$$

et alors :

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{a}{=} \frac{f''(a)}{2} + \circ(1)$$

d'où :

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{f''(a)}{2}$$

ce qui prouve que g est dérivable en a et que :

$$g'(a) = \frac{f''(a)}{2}$$

Correction de l'exercice 18-5

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \circ((x-a)^2) \\ &\underset{a}{=} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \circ((x-a)^2) \end{aligned}$$

et alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{=} \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \circ((x-a)^2)$$

Comme $f''(a) \neq 0$, on a donc :

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)$ est positive sur $\mathbb{R}$ et comme deux fonctions équivalentes en a sont de même signe au voisinage de a, il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\alpha, \alpha\right[,\; f(a) - f(a) \geqslant 0$$

ce qui prouve que $f(a)$ est un minimum local de f.

Sommaire