16 Fonctions réelles d'une variable réelle : calcul différentiel

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

A. Calcul différentiel

Dans toute cette partie et sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et a un élément de I. Toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur un voisinage de a.

A.1. Fonctions dérivables en un point, sur un intervalle

Définition 16.1

Soit f une fonction définie sur I.

i. Si $a \in \overset{\circ}{I}$, on dit que f est **dérivable** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé** de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ii. On dit que f est **dérivable à droite** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(a)$ et appelée **nombre dérivé à droite** de f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

iii. On dit que f est **dérivable à gauche** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'_g(a)$ et appelée **nombre dérivé à gauche** de f en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

iv. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I (à droite uniquement si a est la borne inférieure de I, à gauche uniquement si a est la borne supérieure de I) ; dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f.

Exercice 16.1

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto ax + b$.
2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto |x|$.

Remarques

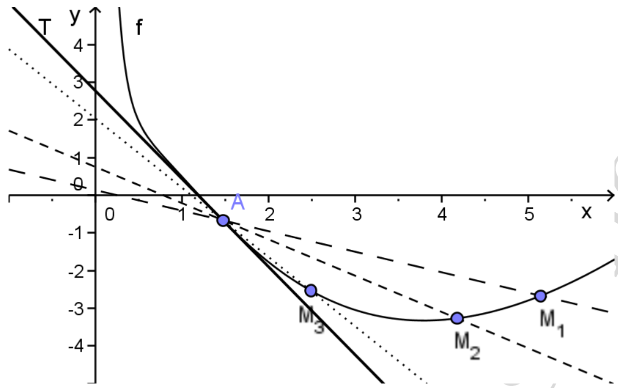
a. On remarque que, si a n'est pas une borne de I, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et si : $f'_d(a) = f'_g(a)$.

b. Si f' est définie et dérivable sur I, sa dérivée est notée f'' ou $f^{(2)}$ et appelée **dérivée seconde** de f.

c. Si f'' est dérivable sur I, sa dérivée est notée $f^{(3)}$.

d. Graphiquement, on rappelle que, si $x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$.

On peut voir sur le graphique ci-dessous que, quand x tend vers a, le point M se rapproche de A et que la droite (AM) se rapproche d'une droite T qui passe par A et qui, au voisinage de A, est très proche de la courbe. Le coefficient directeur de cette droite T est la limite du coefficient directeur de la droite (AM) quand x tend vers a si f est dérivable en a et T a pour équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.



Cette remarque nous conduit à la définition suivante :

Définition 16.2

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

i. Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ est appelé **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

ii. Si $a \in \overset{\circ}{I}$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, on dit qure la droite d'équation $x = f(a)$ est une **tangente verticale** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

iii. Si $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$ ou $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, on dit qure la droite d'équation $x = f(a)$ est une **demi-tangente verticale** (à gauche ou à droite) à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

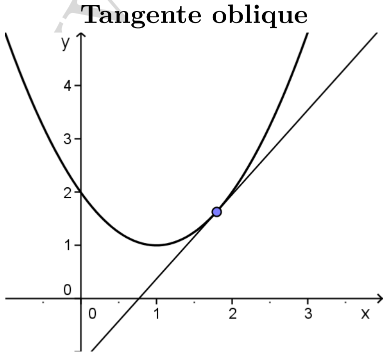
Remarque Si f est dérivable en a et si T_a est la tangente à la courbe représentative de f dans un repère, alors :

a. on dit que T_a est une **tangente horizontale** si $f'(a) = 0$,

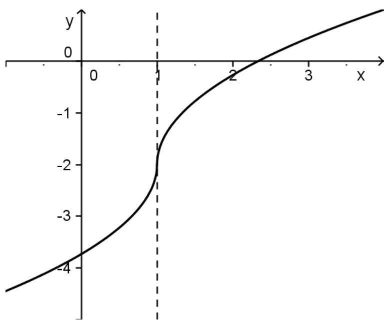
b. on dit que T_a est une **tangente oblique** si $f'(a) \neq 0$,

c. si $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à gauche et à droite en a et si celles-ci ne sont pas égales, on dit que la courbe représentative de f n'afmet pas de tangente au point d'abscisse a : ce point est appelé **point anguleux**.

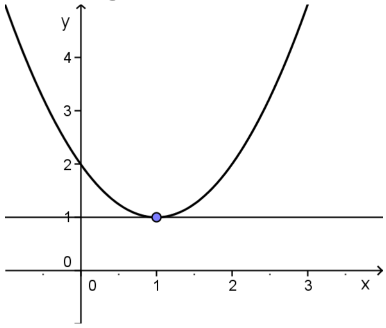
Tangente oblique



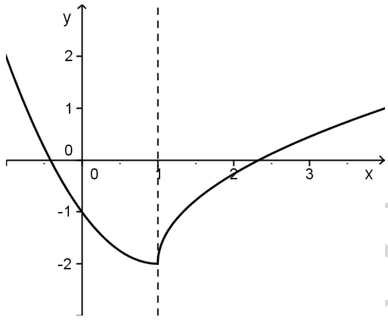
Tangente verticale



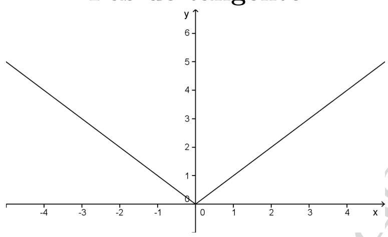
Tangente horizontale



Demi-tangente verticale



Pas de tangente



Le point $O(0,0)$ est un point anguleux

Proposition 16.3

Si f est une fonction dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a.

Preuve Soit a un élément de I. On suppose que f est dérivable en a et on pose :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad g(a) = f'(a)$$

Comme f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

De plus, on peut remarquer que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ f(x) = f(a) + (x - a)\, g(x)$$

et donc, comme $x \mapsto x - a$ et g sont continues en a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui prouve bien que f est continue en a.

□

Remarque Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, on a vu dans l'exercice 14.1 que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en a, alors qu'elle est continue en 0.

Théorème 16.4

Soit f et g des fonctions dérivables sur I et h une fonction dérivable sur un intervalle J.

i. Pour tout réel λ, λf est dérivable sur I et :

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

ii. $f + g$ est dérivable sur I et :

$$(f + g)' = f' + g'$$

iii. $f \times g$ est dérivable sur I et :

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

iv. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

v. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

vi. Si f est dérivable sur I et prend ses valeurs dans J et si h est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$$

Remarque Tous ces résultats sont encore valable pour des fonctions dérivables uniquement en un point a de I (c'est d'ailleurs ce qui est prouvé ci-après) mais sont présentés ainsi pour simplifier la lisibilité.

Remarques

a. Les points *i* et *ii* permettent de dire, en remarquant que la fonction constante nulle est dérivable sur I, que l'ensemble $\mathscr{D}^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire sur $\mathscr{D}^1(I, \mathbb{R})$.

b. Attention à éviter des phrases toutes faites du type « $h \circ f$ est dérivable sur I comme composée de fonctions qui le sont » : en effet, la fonction h n'est pas nécessairement dérivable sur I.

Proposition 16.5

Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16.2 On se propose de démontrer la proposition 16.5.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En factorisant la fonction polynôme $x \mapsto x^n - a^n$, démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en a.
   (b) En déduire que les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

Remarque En utilisant la preuve précédente et 16.4, on a en particulier démontré les résultats suivants :

Proposition 16.6

Dans le tableau suivant, f est une fonction dérivable en tout point d'une D de $\mathbb{R}$, f' désigne la dérivée de f sur D, n est un entier relatif et c une constante réelle.

f	f'	D
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

A.2. Extremums d'une fonction dérivable

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Théorème 16.7

Si f est une fonction définie et dérivable sur $]a, b[$ et si f admet un extremum local en $c \in]a, b[$, alors : $f'(c) = 0$.

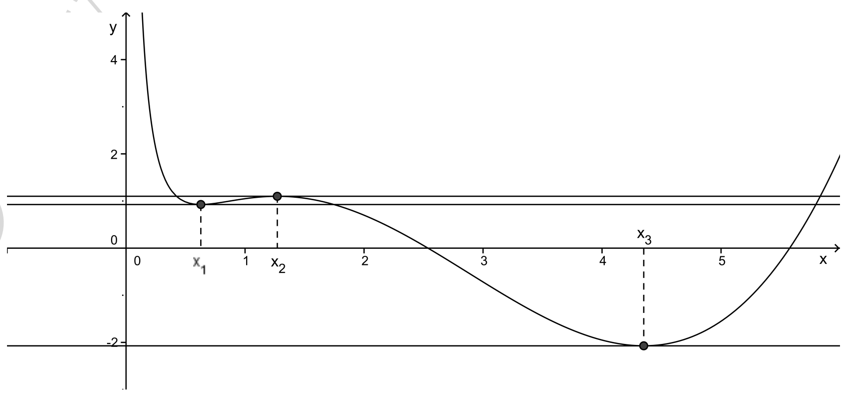
Exercice 16.3 En considérant le signe de $f'(c)$, démontrer le théorème 16.7.

Remarques

a. Ainsi, si une fonction dérivable sur un intervalle I admet un extremum local en un point a **intérieur** à I (donc pas aux bornes de I), alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en a. Par exemple, le graphe ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et admettant un minimum local en x_1, un maximum local en x_2 et un minimum local en x_3.

b. Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0, mais elle n'admet pas d'extremum local en 0 puisque la fonction $x \mapsto x^3$ change de signe sur tout intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$.

c. Attention également au fait que ce résultat n'est valable que sur un intervalle ouvert. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ admet un maximum sur $[0, 1]$ (qui est 1), mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[0, 1]$.



A.3. Accroissements finis

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Théorème 16.8 ▶ Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

i. Si : $\forall x \in]a, b[\,,\ m \leqslant f'(x)$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

ii. Si : $\forall x \in]a, b[\,,\ f'(x) \leqslant M$, alors : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

iii. Si : $\forall x \in]a, b[\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

iv. Si : $\forall x \in]a, b[\,,\ |f'(x)| \leqslant M$, alors : $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant M$.

Remarque Un des intérêts fondamentaux de ce résultat est qu'il permet de déterminer les variations d'une fonction dérivable à partir du signe de sa dérivée, comme on le résume au paragraphe suivant :

A.4. Sens de variations d'une fonction dérivable

Théorème 16.9

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

i. f est constante sur I si et seulement si f' est constante nulle sur $\mathring{I}$,

ii. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur $\mathring{I}$,

iii. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur $\mathring{I}$.

Exercice 16.4 Démontrer le théorème 16.9. On pourra utiliser les inégalités des accroissements finis 16.8.

Remarque Attention : pour appliquer ce théorème, il est fondamental que I soit un intervalle et que f soit continue sur I.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative ou nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque, par exemple : $-2 < 3$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{3}$.

En revanche, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ étant des intervalles, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur chacun de ces intervalles.

Théorème 16.10

Soit f une fonction dérivable sur I.

i. Si f' est positive sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

ii. Si f' est négative sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

A.5. Dérivées successives

Définition 16.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

i. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I. La dérivée de f est appelée **dérivée seconde** de f et notée f'' ou $f^{(2)}$.

ii. Plus généralement, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dit que f est k fois dérivable sur I si f est $k-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I. La dérivée de $f^{(k-1)}$ est alors appelée **dérivée $k^{\text{ème}}$** de f et notée $f^{(k)}$.

iii. On dit que f est infiniment dérivable sur I si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k fois dérivable sur I.

Remarque Par analogie, on note : $f^{(0)} = f$.

Théorème 16.12 ▶ Formule de Leibniz

Soit n un entier naturel, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Le produit $f \times g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Remarque Comme f et g jouent des rôles symétriques, on a aussi, si f et g sont n fois dérivables sur I :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} \times f^{(n-k)}$$

On choisira en général la première ou la seconde écriture en choisissant de dériver k fois la fonction la plus compliquée et $n-k$ fois la fonction la plus simple ou bien, si possible, de dériver k fois une éventuelle fonction polynôme (car ses dérivées sont nulles à partir d'un certain rang).

Définition 16.13

Soit f une continue définie sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est continue et dérivable sur I et si f' est continue sur I.
Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ sont continues sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque Comme une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est également continue sur I, on peut remarquer que :

- une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I,
- une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si elle est infiniment dérivable sur I.

Théorème 16.14

Soit n un entier naturel, f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et h une fonction de classe C^n sur un intervalle J.

i. Pour tout réel λ, λf est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

ii. $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

iii. $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

iv. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

v. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

vi. Si f est dérivable sur I et prend ses valeurs dans J et si h est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque Ces résultats se démontrent par récurrence à l'aide de 16.4.

Proposition 16.15

Les fonctions polynômes et rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines de définition respectifs. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

A.6. Dérivabilité de la réciproque d'une fonction dérivable

Théorème 16.16

Si f est une fonction bijective de I sur J, si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Preuve On a :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

De plus, comme f est bijective de I sur J et comme $f(x_0) = y_0$, on a :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ f^{-1}(y) - x_0 \neq 0$$

et donc :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}$$

Par ailleurs, comme f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0, donc f^{-1} est continue en y_0 et :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Enfin, comme f est dérivable e, x_0, on a :

$$\lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = f'(x_0)$$

et donc, par composition :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = f'(x_0)$$

et finalement, comme $f'(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

□

B. Les fonctions logarithme, exponentielle et puissances

B.1. La fonction logarithme néperien

Théorème 16.17

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Cette fonction est appelée **logarithme népérien** et notée ln.

Remarque La démonstration de ce théorème faisant appel à des résultats démontrés dans le chapitre 15 elle fera l'objet d'un exemple dans ce chapitre.

Proposition 16.18

La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve Par définition, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il en découle de manière immédiate que toutes les fonctions logarithmes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. □

Remarque Les deux résultats suivants découlent de manière immédiate de la définition de la fonction ln et des propriétés de la dérivée d'une fonction composée :

Théorème 16.19

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Théorème 16.20

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

Théorème 16.21

La fonction ln a les propriétés suivantes :

i. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

ii. $\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

iii. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

iv. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n a_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(a_i)$

v. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$

Exercice 16.5

1. En considérant la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$, démontrer le point i du théorème 16.21.
2. Démontrer les points ii à v du théorème 16.21.

Théorème 16.22

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$$

Exercice 16.6 On se propose de prouver le théorème 16.22.

1. Quelle est la limite de la suite $(\ln(2^n))_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Justifier que la fonction ln admet une limite ℓ, finie ou infinie, en $+\infty$.
3. Conclure.

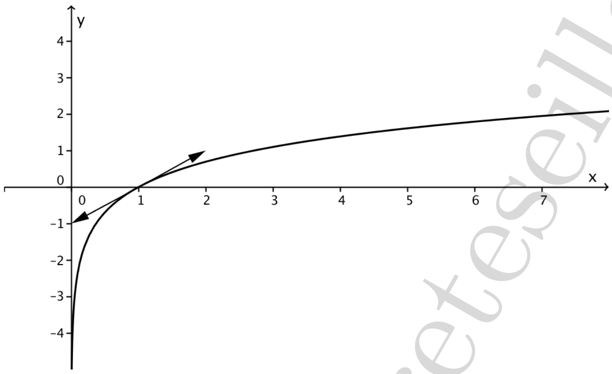


FIGURE 16.1 – Graphe de la fonction ln

Remarque Le lecteur pourra démontrer que la courbe représentative de ln admet pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation $y = x - 1$.

Graphiquement, on voit que la courbe est « en dessous » de cette tangente et plus généralement de toutes ses tangentes : on dit que la fonction ln est **concave**. On peut le démontrer, par exemple, en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(x) - x + 1$ pour démontrer que celle-ci est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$$

Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il faut le connaitre car il est très souvent utile, et surtout savoir le démontrer.

Théorème 16.23

On a :

$$\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x - 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$$

Preuve On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$$

et donc, comme la fonction ln est dérivable en 1 :

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$$

ce qui prouve que :

$$\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x - 1$$

Le second équivalent se déduit de manière immédiate par changement de variable $x = 1 + u$. $\square$

B.2. La fonction exponentielle

Théorème 16.24

La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et elle est notée exp.

Preuve On a déjà vu que ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

ce qui suffit pour affirmer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 16.25

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$$

Exercice 16.7 Démontrer la proposition 16.25.

Remarque On déduit de la définition, du résultat précédent et de 16.4 le résultat suivant :

Proposition 16.26

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $\exp\circ u$ est dérivable sur I et :

$$(\exp\circ u)' = u' \times \exp\circ u$$

Proposition 16.27

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 16.28

i. $\exp(0) = 1$

ii. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)$

iii. $\forall b\in\mathbb{R},\ \exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$

iv. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

v. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{R}^n,\ \exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \exp(a_i)$

vi. $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ (\exp(a))^n = \exp(na)$

Preuve

1. Comme exp est la réciproque de la fonction ln, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(\ln(x)) = x$$

et donc en particulier :

$$\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1$$

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Comme la fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique couple (u,v) de réels strictement positifs tels que :

$$a = \ln(u) \quad \text{et} \quad b = \ln(v)$$

et alors :

$$u = \exp(a) \quad \text{et} \quad v = \exp(b)$$

et donc :

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= \exp(\ln(u) + \ln(v)) \\ &= \exp(\ln(uv)) \\ &= uv \\ &= \exp(a) \times \exp(b)\end{aligned}$$

Les points suivant s'en déduisent en procédant comme dans l'exercice 14.8.

□

Remarque On peut constater que la fonction exponentielle a des propriétés analogues à celles des opérations sur les puissances. Cela nous conduit aux notations suivantes :

Notation 16.29

On note :

$$\mathrm{e} = \exp(1) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$$

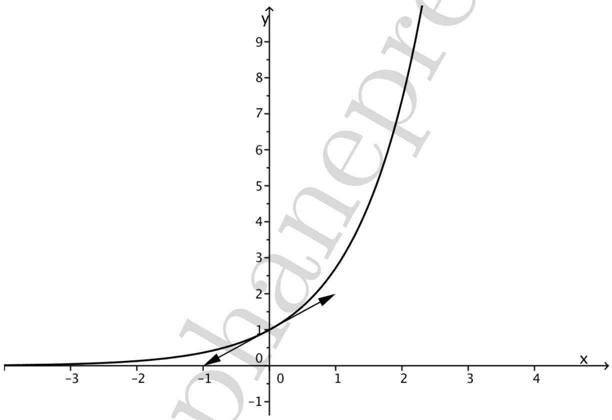


FIGURE 16.2 – Graphe de la fonction exp

Remarque Le lecteur pourra démontrer que la courbe représentative de exp admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$.

Graphiquement, on voit que la courbe est « au dessus » de cette tangente et plus généralement de toutes ses tangentes : on dit que la fonction exp est **convexe**. On peut le démontrer, par exemple, en étudiant la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ pour démontrer que celle-ci est positive sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il faut le connaitre car il est très souvent utile, et surtout savoir le démontrer.

Théorème 16.30

On a :

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Preuve

On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$$

et donc, comme la fonction exp est dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

ce qui prouve que :

$$\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$$

□

Théorème 16.31

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Preuve

- La fonction exponentielle est monotone sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ en $+\infty$, finie ou infinie. De plus, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

donc par convention :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\ln(x)} = \ell$$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; e^{\ln(x)} = x$$

d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty, \quad \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

d'où :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

□

B.3. Les fonctions puissances

Définition 16.32

Pour tout réel a, on appelle **fonction puissance d'exposant a** la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f_a(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$$

Remarques **a.** D'après les propriétés de la fonction ln, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; (x^n)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(x^n)\right) \\ &= \exp(\ln(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp(\ln(x))\\ &= x.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est égale sur $\mathbb{R}_+^*$ à la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (racine $n^{ème}$)

b. Les résultats suivants découlent de manière immédiate des propriétés des fonctions exp et ln :

Proposition 16.33

Pour tout réel b, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(a^b) = b\ln(a)$$

Proposition 16.34

Pour tout réel a, la fonction $f_a : x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln(x)) = ax^{a-1}$$

Théorème 16.35

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

1. si $a > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$
2. si $a < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$

Remarque Si $a > 0$, on prolonge donc naturellement la fonction $f_a : x \mapsto x^a$ par continuité en 0 en posant : $f_a(0) = 0$.

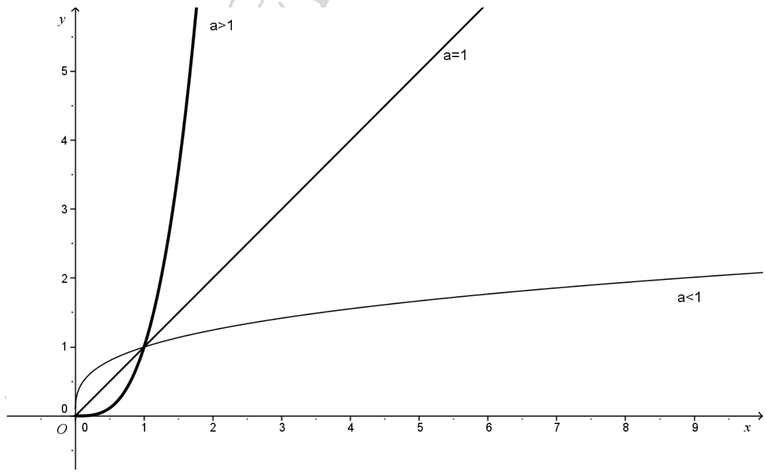


Figure 16.3 – Graphe de la fonction $x \mapsto x^a$

Théorème 16.36

On a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Preuve Si $\alpha = 0$, l'équivalence est évidente puisqu'il y a égalité. Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Comme la fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable et strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et comme la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $g : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\,,\ g'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$$

De plus, on a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\,,\ \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

et donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \times g'(0) = 1$$

ce qui prouve que : $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$. □

C. Comparaison des fonctions de référence : « croissances comparées »

Dans un grand nombre de calculs de limites, on se retrouve avec des opérations donnant lieu à des formes indéterminées du type « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Dans un tel cas, il est intéressant de savoir quelle fonction est éventuellement prépondérante. On a déjà vu dans le chapitre 13 comment comparer entre elles les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles. Mais qu'en est-il des fonctions exp, ln et $x \mapsto x^a$ (avec $a > 0$) introduites ci-avant et qui sont toutes croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$?

L'objet de ce paragraphe est de comparer ces fonctions en déterminant, pour chaque comparaison possible, quelle fonction « croit le plus vite » pour aider, dans les calculs de limites, à identifier la fonction prépondérante.

C.1. Comparaison des fonctions puissances

Théorème 16.37

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} x^a \underset{x \to +\infty}{=} \circ(x^b) \\ \\ x^b \underset{x \to 0^+}{=} \circ(x^a) \end{cases}$$

Preuve On suppose que : $0 < a < b$. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad \text{et} \quad \frac{x^b}{x^a} = x^{b-a}.$$

Comme $a - b < 0$ et $b - a > 0$, on a donc, d'après 16.35 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{x^b} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{x^b}\frac{x^b}{x^a} = 0.$$

□

C.2. Comparaison des fonctions puissances et ln

Théorème 16.38

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

Autrement dit :

$$(\ln(x))^b \underset{x \to +\infty}{=} \circ(x^a)$$

Exercice 16.8 On se propose de démontrer le théorème 16.38.

1. (a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x$$
   (b) En déduire que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
2. Déduire du résultat précédent que :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$
puis que :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

Exercice 16.9 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^2 - \sqrt{x} - \ln(x)$.

Théorème 16.39

Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs. On a :
$$\lim_{x\to0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0$$
Autrement dit :
$$|\ln(x)|^b \underset{x\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^a}\right)$$

Remarques

a. Ce résultat est se déduit immédiatement de 16.38 en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$.

b. On retiendra donc qu'en 0 ou en $+\infty$, la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction ln lorsqu'il y a une forme indéterminée.

c. Les deux résultats précédents restent valables si b est négatif ou nul. Mais il ne s'agit pas alors de croissances comparées puisqu'il n'y a pas d'indétermination dans ce cas.

d. Attention à ne pas abuser de l'expression « par croissances comparées » et bien penser à vérifier qu'il s'agit bien de comparaison de croissances.

C.3. Comparaison des fonctions puissances et exponentielle

Théorème 16.40

Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs. On a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{x^b}} = 0$$
Autrement dit :
$$x^a \underset{x\to+\infty}{=} \circ\left(e^{x^b}\right)$$

Preuve On peut remarquer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x^a}{e^{x^b}} = \frac{(\ln(e^{x^b})^{b/a}}{e^{x^b}}$$
De plus, d'après 16.38 et comme $\dfrac{a}{b}$ est strictement positif, on a :
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln(t))^{a/b}}{t} = 0$$

Enfin on a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^b} = +\infty$$

donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(e^{x^b})^{b/a}}{e^{x^b}} = 0$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Remarques

a. On retiendra qu'au voisinage de $+\infty$, les fonctions exponentielles sont prépondérantes sur les fonctions puissances

b. Avec 16.38, on en déduit de manière immédiate le résultat suivant.

C.4. Comparaison des fonctions ln et exponentielle

Théorème 16.41

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{e^{x^b}} = 0$$

Autrement dit :

$$(\ln(x))^a \underset{x\to+\infty}{=} \circ\left(e^{x^b}\right)$$

D. Caractérisation des fonctions convexes

D.1. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 16.42

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I,
2. f' est croissante sur I,
3. la courbe représentative de f est « au dessus » de toutes ses tangentes.

Remarques

a. La preuve de ce théorème est proposée dans la section « Pour aller plus loin ».

b. Ces résultats restent valables si f est dérivable sur I et si f' n'est pas continue sur I (d'ailleur la preuve qui est proposée ici n'utilise pas la continuité de f'), mais le programme n'envisage que le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Compte tenu de la définition d'une fonction concave, on en déduit de manière immédiate que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est concave sur I,
- f' est décroissante sur I,
- la courbe représentative de f est « en dessous » de toutes ses tangentes.

Exemples 16.1

a. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

D.2. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Théorème 16.43

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f est convexe sur I,

ii. f'' est positive ou nulle sur I.

Preuve Ce résultat découle de manière immédiate du théorème 16.42 puisque, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, f' est croissante sur I si et seulement si f'' est positive ou nulle sur I. □

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 16-1

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{f : x \mapsto ax + b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et} : \forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = a}$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On distingue les cas selon le signe de x_0.

► Si $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\forall x \in \left]0, 2x_0\right[, \quad \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = 1$$

ce qui prouve que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

► Si $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\forall x \in \left]2x_0, 0\right[, \quad \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{(-x) - (-x_0)}{x - x_0} = -1$$

et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = -1$$

ce qui prouve que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_-^*$.

► Si $x_0 = 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{(-x) - (-x_0)}{x - x_0} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = -1$$

donc la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais, les nombres dérivées à gauche et à droite étant différents, elle n'est pas dérivable en 0.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto |x| \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et } \mathbb{R}_+^*, \text{ mais pas en } 0}$$

Correction de l'exercice 16-2

1. (a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n - a^n = (x-a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$$

et donc, la fonction polynôme $x :\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ étant continue en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto x^n \text{ est dérivable en } a \text{ et : } f'(a) = na^{n-1}}$$

(b) ► Soit P une fonction polynôme. Il existe donc un entier naturel m et des réels $a_0, a_1, \dots, a_m$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_k x^k$$

donc d'après 16.4 la question précédente P est la somme de fonctions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{\text{Les fonctions polynômes sont dérivables sur } \mathbb{R}}$$

► Soit R une fonction rationnelle. Il existe deux fonctions polynômes P et Q telles que, en notant E l'ensemble des racines de Q, le domaine de définition de R soit $D_R = \mathbb{R} \setminus E$ et :

$$\forall x \in D_R,\ R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Comme P et Q sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat précédent, R est donc dérivable en tout point x_0 tel que $Q(x_0) \neq 0$, donc en tout point de F, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition}}$$

2. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \ /\ t \neq t_0,\ \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{t - t_0} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{\left(\sqrt{t} - \sqrt{t_0}\right)\left(\sqrt{t} + \sqrt{t_0}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t_0}}$$

De plus, comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue en t_0, on a :

$$\lim_{t \to t_0} \left(\sqrt{t} + \sqrt{t_0} \right) = 2\sqrt{t_0}$$

et donc :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{t - t_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t_0}} & \text{si } t_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t_0 = 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{La fonction } u : t \mapsto \sqrt{t} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ mais pas en 0 et :} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \end{array}}$$

Correction de l'exercice 16-3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]a, b[$, admettant un extremum local en c appartenant à $]a, b[$. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ soit inclus dans $]a, b[$ tel tel que $f(c)$ soit un extremum global de f sur cet intervalle. On pose alors :

$$a' = c - \varepsilon \quad \text{et} \quad b' = c + \varepsilon$$

et on suppose que $f(c)$ est le maximum de f sur $]a', b'[$ (le cas d'un minimum se traite de manière analogue. On a alors :

$$\forall x \in]a', b'[\,,\ f(x) \leqslant f(c)$$

et donc :

$$\forall x \in]a', c[\,,\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]c, b'[\,,\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

et donc, en faisant tendre x vers c à gauche et à droite, et comme f est dérivable en c :

$$f'(c) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(c) \leqslant 0$$

ce qui prouve que : $f'(c) = 0$.

Correction de l'exercice 16-4

On démontre le point *iii*. Les points *i* et *ii* se démontrent de manière analogue.

- On suppose que f est décroissante sur I. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Comme f est décroissante sur I, $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de signes contraires pour tout x appartenant à I, donc :

  $$\forall x \in I \ / \ x \neq x_0,\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

  et donc, en faisant tendre x vers x_0 et comme f est dérivable en x_0 :

  $$f'(x_0) \leqslant 0$$

  donc f' est négative sur $\overset{\circ}{I}$.

- On suppose que f' est négative sur $\overset{\circ}{I}$, c'est-à-dire que :

  $$\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leqslant 0$$

  Comme f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, on a alors, d'après les inégalités des accroissements finis :

  $$\forall (a, b) \in I \ / \ a < b,\ f(b) - f(a) \leqslant 0 \times (b - a)$$

  et donc :

  $$\forall (a, b) \in I \ / \ a < b,\ f(b) - f(a)$$

  donc f est décroissante sur I.

Finalement, f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Correction de l'exercice 16-5

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $x \mapsto \ln(ax)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(x) - \ln(a)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Il en découle que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

$$f(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 0$$

et en particulier on adonc :

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

2. ► En prenant $a = \dfrac{1}{b}$ dans le résultat précédent, on obtient :

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b)$$

et donc, comme $\ln(1) = 0$:

$$\boxed{\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)}$$

► D'après les deux points précédents, on a :

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)\\ &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

► Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathscr{H}(n) :\ « \forall (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) »$$

est vraie.

◇ Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{H}(n)$ soit vraie. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$. On a :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1}\right)$$

donc, d'après le point i :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) + \ln(a_{n+1}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) + \ln(a_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \ln(a_i)\end{aligned}$$

donc : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)}$$

► Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On distingue les cas selon le signe de n.

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, d'après le résultat prédédent :

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln(a)\\ &= n\ln(a)\end{aligned}$$

◇ Si $n = 0$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(a^0) &= \ln(1)\\ &= 0\\ &= 0\ln(a)\end{aligned}$$

◇ Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)\\ &= -\ln\big(a^{-n}\big)\end{aligned}$$

et comme $-n$ appartient à $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= -(-n)\ln(a)\\ &= n\ln(a).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(a^n) = n\ln(a)}$$

Correction de l'exercice 16-6

1. D'après 16.21, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2^n) = n\ln(2).$$

Comme $\ln(2) > 0$, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty}$$

2. Comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{La fonction ln admet une limite } \ell\text{, finie ou infinie, en } +\infty}$$

3. ► On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

donc par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \ell$$

ce qui nous permet de conclure, d'après la question 1 :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$$

► On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

De plus, on a :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty}$$

Correction de l'exercice 16-7

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction inverse, ne s'annule pas sur cet intervalle, donc la fonction exponentielle (réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) &= (\ln^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{|n'(\exp(x))}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}\\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\exp^{(n)} = \exp$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La fonction exponentielle est de classe } \mathcal{C}\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ \exp(n) = \exp}$$

Correction de l'exercice 16-8

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= \frac{1}{x} - 1\\ &= \frac{1-x}{x}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [1,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0$$

Ainsi f est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc $f(1) = -1$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant -1 \leqslant 0$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x}$$

(b) D'après le résultat précédent et comme la fonction ln est positive sur $[1, +\infty[$, on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ 0 \leqslant \ln(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$$

et donc, d'après les propriétés de la fonction ln :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{2} \leqslant \sqrt{x}$$

d'où :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

2. ► Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$$

donc, d'après le résultat précédent et par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^a)}{x^a} = 0$$

soit encore :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a\ln(x)}{x^a} = 0$$

et finalement, comme $a \neq 0$:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0}$$

► Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$\lim_{t\to0} t^b = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{b/a}} = 0$$

donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{b/a}}\right)^b = 0$$

d'où :

$$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0}$$

Correction de l'exercice 16-9

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 - \sqrt{x} - \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or on a, d'après les limites usuelles et les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 1,$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x} - \ln(x) \right) = +\infty}$$

Sommaire

Fonctions réelles d'une variable réelle : calcul différentiel ... 1

A. Calcul différentiel ... 1
A.1. Fonctions dérivables en un point, sur un intervalle ... 1
A.2. Extremums d'une fonction dérivable ... 5
A.3. Accroissements finis ... 6
A.4. Sens de variations d'une fonction dérivable ... 6
A.5. Dérivées successives ... 7
A.6. Dérivabilité de la réciproque d'une fonction dérivable ... 8
B. Les fonctions logarithme, exponentielle et puissances ... 9
B.1. La fonction logarithme néperien ... 9
B.2. La fonction exponentielle ... 11
B.3. Les fonctions puissances ... 13
C. Comparaison des fonctions de référence : « croissances comparées » ... 15
C.1. Comparaison des fonctions puissances ... 15
C.2. Comparaison des fonctions puissances et ln ... 15
C.3. Comparaison des fonctions puissances et exponentielle ... 16
C.4. Comparaison des fonctions ln et exponentielle ... 17
D. Caractérisation des fonctions convexes ... 17
D.1. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ... 17
D.2. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ... 18
E. Correction des exercices ... 18