15 Fonctions réelles d'une variable réelle : limite, continuité, comparaisons

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

A. Limite d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Les preuves de cette section, souvent très théorique, et utilisant des notations lourdes, ne présentent pas un intérêt fondamental, mais leur lecture peut permettre d'aider à mémoriser le cours et à maîtriser certaines techniques de rédaction. Elles pourront cependant n'être travaillées que dans un deuxième temps, lorsque les méthodes fondamentales seront maîtrisées.

A.1. Notions de topologie

Définition 15.1

Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, on appelle **segment** d'extrémités a et b on note $[a,b]$ l'ensemble

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$$

Définition 15.2

On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tout couple (a,b) d'éléments de I, le segment d'extrémités a et b est inclus dans I, c'est-à-dire si :

$$\forall (a,b) \in I^2 \ / \ a \leqslant b, \ (a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I)$$

Remarques

a. Dit basiquement et en termes peu rigoureux, un intervalle est donc un ensemble « sans trous ».

b. On conviendra également de parler d'intervalles d'entiers en notant, si p et n sont deux entiers tels que $p \leqslant n$: $[\![p,n]\!] = [p,n] \cap \mathbb{Z}$.

Exemples 15.1

a. Les segments de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

b. $\mathbb{R}^+$ est un intervalle.

c. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Notation 15.3

Pour tout couple (a,b) de réels tels que $a \leqslant b$, on convient de noter :

i. $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x < b\}$

ii. $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leqslant b\}$

iii. $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$

iv. $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant a\}$

v. $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$

vi. $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geqslant a\}$

vii. $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$

Définition 15.4

Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$,

i. les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont appelés **intervalles fermés**,

ii. les intervalles de la forme $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont appelés **intervalles ouverts**,

iii. les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ sont appelés **intervalles semi-ouverts**.

Remarques

a. Ainsi $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont donc à la fois ouverts et fermés.

b. On peut remarquer que, si I est un intervalle fermé, alors le complémentaire $\mathbb{R} \setminus I$ de I dans $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert ou la réunion d'intervalles ouverts.

c. De même, si I est un intervalle ouvert, alors le complémentaire $\mathbb{R} \setminus I$ de I dans $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé ou la réunion d'intervalles fermés.

Exemples 15.2

a. $[-2, 1]$ est un intervalle fermé. Son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, qui est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, -2[$ et $]1, +\infty[$

b. $]5, +\infty[$ est un intervalle ouvert. Son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé $]-\infty, 5]$.

Notation 15.5

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note :

1. $\overline{I}$ le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) fermé contenant I (autrement dit la réunion de I et de ses bornes réelles éventuelles),
2. $\overset{\circ}{I}$ le plus grand intervalle ouvert contenu dans I (autrement dit I privé de ses bornes éventuelles).

Exemples 15.3

a. Si $I = [-5, 7[$, alors : $\overline{I} = [-5, 7]$ et $\overset{\circ}{I} =]-5, 7[$.

b. Si $I = [-5, 7]$, alors : $\overline{I} = [-5, 7]$ et $\overset{\circ}{I} =]-5, 7[$.

c. Si $I =]-5, 7[$, alors : $\overline{I} = [-5, 7]$ et $\overset{\circ}{I} =]-5, 7[$.

d. Si $I =]-\infty, 7]$, alors : $\overline{I} =]-\infty, 7]$ et $\overset{\circ}{I} =]-\infty, 7[$.

Notation 15.6

On note : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Remarque Cette notation est adoptée par analogie avec les notations précédentes mais n'en est pas une conséquence.

Définition 15.7

Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Si a est un réel, on appelle **voisinage** de a toute partie V_a de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de centre a (*i.e.* de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[$ où α est un réel strictement positif).
2. Si a est un réel, on appelle **voisinage épointé** de a tout ensemble de la forme $V_a \setminus \{a\}$ où V_a est un voisinage de a.
3. Si $a = +\infty$ (respectivement si $a = -\infty$), on appelle **voisinage** de a toute partie V_a de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A[$).

Définition 15.8

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a tel que $\mathcal{D}_f \cap (V_a \setminus \{a\})$ contienne un intervalle non vide.

Exemples 15.4

a. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x$ sont définies au voisinage de 0.

b. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie au voisinage de 1.

A.2. Limite finie d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Dans toute la suite de cette partie et sauf précision complémentaire, a, b et ℓ sont des éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ et I est un voisinage éventuellement épointé de a.
Sauf précision, toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur I.

Limite finie en un point

Définition 15.9

On suppose que a et ℓ sont réels. On dit que :

i. f tend vers ℓ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

ii. f tend vers ℓ en a à gauche et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{\to \\ x<a}} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha, a] \cap I,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

iii. f tend vers ℓ en a à droite et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{\to \\ x>a}} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in [a, a+\alpha[\cap I,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

Remarques

a. Pour mieux comprendre la définition de la limite finie d'une fonction en un point, on pourra lire la première phrase comme suit : « on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ en prenant x suffisamment proche de a ».

b. En particulier, si f est définie en a et si f admet une limite en a, alors nécessairement : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Attention, cela n'est bien sûr vrai que si f admet une limite en a.

c. On peut remarquer qu'il est équivalent de dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et que $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand x tend vers a.

d. On notera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ pour dire que f tend vers 0 en a en restant positive au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$ pour dire que f tend vers 0 en a en restant négative au voisinage de a.

Proposition 15.10

Pour tout entier naturel n et pour tout réel a, on a :

i. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ *ii.* si $a \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ *iii.* si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{a^n}$

Définition 15.11

On suppose que ℓ est réel.

i. On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, A \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x > A,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

ii. On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, A \in \mathbb{R}_-^* \ /\ \forall x < A,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

Proposition 15.12

Pour tout entier naturel n, on a :

i. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ *ii.* $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Preuve Soit n un entier naturel non nul.

i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

et donc, la fonction $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

ce qui prouve, en posant $A = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x > A,\ \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ii. Se démontre comme le point précédent.

□

Limite infinie en un point

Définition 15.13

On suppose que a est un réel.

i. On dit que f tend vers $+\infty$ en a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) > M$$

ii. On dit que f tend vers $+\infty$ en a à droite et on note $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in\ [a, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) > M$$

iii. On dit que f tend vers $+\infty$ en a à gauche et on note $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha, a] \cap \mathcal{D}_f,\ f(x) > M$$

iv. On dit que f tend vers $-\infty$ en a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) < M$$

v. On dit que f tend vers $-\infty$ en a à droite et on note $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in\ [a, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) < M$$

vi. On dit que f tend vers $-\infty$ en a à gauche et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha, a] \cap \mathcal{D}_f,\ f(x) < M$$

Proposition 15.14

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition 15.15

i. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x > A,\ f(x) > M$$

ii. On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x < A,\ f(x) > M$$

iii. On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x > A,\ f(x) < M$$

iv. On dit que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x < A,\ f(x) < M$$

Proposition 15.16

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Exercice 15.1

1. Démontrer la proposition 15.14.
2. Démontrer la proposition 15.16.

Théorème 15.17

Si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique.

Exercice 15.2 On se propose de démontrer que, si f admet pour limite ℓ en a, alors sa limite ℓ est unique. On traite le cas où a est un réel, invitant le lecteur à s'inspirer de cette preuve pour traiter les autres cas.

1. On suppose que f admet deux limites finies ℓ et ℓ' en a.

   i. En appliquant la définition de la limite, démontrer que :

   $$\forall \varphi \in \mathbb{R}_+^*,\ |\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

   ii. En déduire que : $\ell = \ell'$.

2. On suppose que f tend vers $+\infty$ en a. Démontrer que f ne peut avoir une limite finie ou une limite égale à $-\infty$.

Proposition 15.18

Si f admet une limite ℓ non nulle en a, il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.

Remarque Ce résultat n'est pas au programme mais nous sera utile dans un grand nombre de démonstrations. Il est donc important de savoir le redémontrer.

Limites et opérations algébriques

Théorème 15.19

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors :

i. si λ est un réel : $\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \ell$

ii. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$

iii. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$

iv. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \ell \times \ell'$

v. si $\ell' \neq 0$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

Remarques

a. Ces résultats restent valables dans le cas d'une limite à droite ou à gauche en a si $a \in \mathbb{R}$.

b. Attention : on ne peut rien dire de la limite éventuelle de f en a si $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \ell$ avec $\ell > 0$. f peut tendre vers ℓ, vers $-\ell$, ou même ne pas avoir de limite.

Exemple 15.5 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{x \to a} x = a$, on en déduit successivement :

a. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{x \to a} \alpha x = \alpha a$,

b. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à n : $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ (par récurrence sur n et en utilisant i et iii),

c. pour toute fonction rationnelle R définie en a : $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$.

Théorème 15.20

Soit f et g deux fonctions.

i. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

ii. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

iii. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

iv. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

Preuve On démontre le point i dans le cas où a est réel (les autres points et les cas où a est infini se prouvent de manière analogue).
Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on a, par définition de la limite :

$$\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a - \alpha_1, a + \alpha_1[\cap I, \ |f(x) - \ell| < 1$$

et alors :

$$\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a - \alpha_1, a + \alpha_1[\cap I, \ f(x) > \ell - 1$$

De plus, comme $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, on peut écrire :

$$\exists\,\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[\cap I,\ g(x) > M - \ell + 1$$

et alors, en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ f(x) + g(x) > M$$

ce qui prouve, ceci étant vrai pour tout réel M, que : $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$.

□

Remarque Ces résultats restent valables dans le cas d'une limite à gauche ou à droite dans le cas où a est réel.

Exemple 15.6 Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + x^2\right) = +\infty$$

Théorème 15.21

Soit, f et g deux fonctions.

i. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

ii. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^*$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = -\infty$

iii. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

iv. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = -\infty$

v. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^*$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

vi. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = -\infty$

vii. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

Remarque Ces résultats restent valables dans le cas d'une limite à gauche ou à droite dans le cas où a est réel.

Exemple 15.7 Comme $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - 3\right) = -3$ et $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x) = -\infty$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - 3\right)(x^3 + x) = +\infty$$

Théorème 15.22

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et b un élément de J ou une borne (éventuellement infinie) de J. On suppose que f prend ses valeurs dans J et que g est une fonction définie sur J.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$$

Remarque Ces résultats restent valables dans le cas d'une limite à gauche ou à droite dans le cas où a est réel.

Exercice 15.3 Déterminer la limite éventuelle de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$ en 2.

Remarque Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 15.23

i. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$

ii. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

iii. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

iv. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

v. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Exercice 15.4 Déterminer la limite éventuelle de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$ en -2.

A.3. Ordre et limites de fonctions

Dans toute la suite de cette partie et sauf précision complémentaire, a, b et ℓ sont des éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ et I est un voisinage, éventuellement épointé, de a.
Sauf précision, toutes les fonctions envisagées sont définies sur I.

Théorème 15.24 ▶ Théorème de l'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions telles que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Si $\ell \in \mathbb{R}$ et si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Preuve On démontre le théorème dans le cas où $a = +\infty$. Les cas $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$ se traitent de manière analogue, en adaptant la définition.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \begin{cases} \exists\, A_1 \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geqslant A_1,\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \\ \exists\, A_2 \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geqslant A_2,\ \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

et alors, en posant $A = \max(A_1, A_2)$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, A \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \geqslant A,\ \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui prouve que : $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \ell$. □

Remarques

a. Si a appartient à $\mathbb{R}$ et est une borne de I, la limite envisagée dans ce théorème est une limite à gauche ou à droite, selon que $a = \sup I$ ou $a = \inf I$.

b. Ce théorème reste valable dans le cas d'une limite à gauche ou à droite en a dans le cas où a est réel.

c. Attention à la rédaction et ne pas écrire $\lim_a f \leqslant \lim_a g \leqslant \lim_a h$ avant de conclure. En effet, on ne peut pas écrire $\lim_a g$ tant que son existence n'a pas été prouvée, ni écrire une égalité ou une inégalité si on n'a pas prouvé que cette limite est finie.

d. En conséquence immédiate du théorème de l'encadrement, on obtient également cette deuxième version :

Théorème 15.25

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant g(x)$$

Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Théorème 15.26 ▶ Théorème de prolongement des inégalités

Soit f et g deux fonctions telles que : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.

i. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors : $\ell \leqslant \ell'$

ii. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

iii. Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Remarques

a. Si a est une borne de I, la limite envisagée dans ce théorème est une limite à gauche ou à droite, selon que $a = \sup I$ ou $a = \inf I$.

b. Ce théorème reste valable dans le cas d'une limite à gauche ou à droite en a dans le cas où a est réel.

c. Attention, par prolongement, une inégalité stricte devient large. Par exemple, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x} > 0, \quad \text{mais} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \geqslant 0$$

A.4. Théorème de la limite monotone

On suppose que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et, si a et b sont réels : $a < b$.

Théorème 15.27 ▶ Théorème de la limite monotone

Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$, alors f admet une limite (finie ou infinie) à droite en a et à gauche en b.

Remarques

a. Ce théorème est démontré dans la section « Pour aller plus loin ».

b. En pratique, ce théorème sert peu aux concours. On l'utilise le plus souvent pour étudier des fonctions du type $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ ou $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, dont on ne sait pas calculer les limites simplement.

B. Continuité d'une fonction

B.1. Continuité d'une fonction en un point, sur un intervalle

Dans cette partie, on suppose que a est un réel appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$ et que f est une fonction définie sur I.

Définition 15.28

i. On dit que f est **continue** en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ii. On dit que f est **continue à gauche** en a si : $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

iii. On dit que f est **continue à droite** en a si : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

iv. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarques

a. En particulier, si a n'est pas une borne de I, f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

b. Si $I = [a, b]$ (avec $a < b$), dire que f est continue sur I revient à dire qu'elle est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Exercice 15.5 Étudier la continuité en 1 et en 2 de g si $g(2) = 6$, $g(1) = \ln(2)$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\},\ g(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Définition 15.29

Si a est un élément ou une borne de I et si f est une fonction définie sur $J \setminus \{a\}$ mais pas définie en a, on dit que f est **prolongeable par continuité** en a si f a une limite finie en a.

Remarque Attention à ne pas confondre fonction continue et fonction prolongeable par continuité : une fonction définie en un point a est soit continue , soit discontinue en a, mais ne peut pas être prolongeable par continuité en a.

Théorème 15.30

Soit f et g deux fonctions continues sur I et h une fonction continue sur un intervalle J.

i. Les fonctions $x \mapsto f(x)g(x)$ et $x \mapsto f(x) + g(x)$ sont continues sur I.

ii. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur I.

iii. Si f prend ses valeurs dans J, alors $h \circ f$ est continue sur I.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate des résultats du paragraphe A.2.

b. Attention dans le cas d'une composée, à éviter des justifications du type « $h \circ f$ est continue sur I comme composée de fonctions qui le sont ». En effet, les fonctions h et f ne sont en général pas définies sur le même ensemble.

Théorème 15.31

Les fonctions polynômes, rationnelles, ln, exponentielle, puissances, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sont continues sur leurs domaines de définitions respectifs.

B.2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 15.32 ▶ Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a et b sont deux éléments de I, alors, pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que : $f(x) = d$.
En particulier, si f est une fonction continue et changeant de signe sur I, alors f s'annule au moins une fois sur I.

Théorème 15.33 ▶ Théorème des bornes atteintes

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
De plus, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Par conséquent, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* admet un maximum et un minimum globaux.

C. Fonctions continues bijectives

C.1. Théorème de la bijection

Théorème 15.34 ▶ Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (dont les bornes, finies ou infinies, sont notées a et b), alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) dont les bornes sont les limites respectives de f en a et en b.

Remarque Si f est une bijection de I sur J, les équations $f(x) = y$ et $x = f^{-1}(y)$ sont équivalentes, donc la courbe représentative de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 15.6 On se propose de démontrer partiellement ce théorème (dans le cas où I est un segment). On suppose que $I = [a, b]$ et que f est une fonction continue et strictement croissante sur I.
Démontrer que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et que $f(I) = [f(a), f(b)]$.

C.2. Propriétés de la réciproque

Théorème 15.35

Si f est une fonction bijective continue et strictement monotone de I sur J, alors :
i. la monotonie de f^{-1} sur J est la même que celle de f sur I,
ii. f^{-1} est continue sur J.

D. Comparaisons de fonctions au voisinage d'un point

Dans cette partie, et sauf mention contraire, a désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur un voisinage de a, éventuellement privé de a.

D.1. Fonction négligeable devant une autre

Définition 15.36

On dit qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} \circ(g)$.

Remarques

a. Si f est négligeable devant g en a, on dit aussi que g est prépondérante sur f en a.

b. L'égalité « $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ » se lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x est au voisinage de a ».

c. En particulier, dire que $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(1)$ équivaut à dire que f tend vers 0 en a.

d. En pratique, il est rare que l'on doive démontrer dans un problème qu'une fonction est négligeable devant une autre. En revanche, on utilise fréquemment les négligeabilités de référence (voir après).

e. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une négligeabilité en a^- ou en a^+ lorsque a est un réel.

f. De la définition, on déduit de manière immédiate les deux propositions suivantes :

Proposition 15.37

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarques

a. Attention. Même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

b. On en déduit, grâce aux croissances comparées de référence (dont une preuve est proposée dans le chapitre 14) :

Proposition 15.38 ► Négligeabilités de référence en $+\infty$

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a < b$, alors : $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$ *ii.* $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

iii. $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$ *iv.* $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

Proposition 15.39 ► Négligeabilités de référence en 0

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a > b$, alors : $x^a \underset{0}{=} \circ(x^b)$ *ii.* $(\ln(x))^a \underset{0}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^b}\right)$

Proposition 15.40

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f \underset{a}{=} \circ(h)$.

ii. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $i \underset{a}{=} \circ(j)$, alors : $f \times i \underset{a}{=} \circ(g \times j)$.

iii. Si $f \underset{a}{=} \circ(h)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f + g \underset{a}{=} \circ(h)$.

iv. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$, alors : $f \times h \underset{a}{=} \circ(g \times h)$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Comme les erreurs sont fréquentes lors d'opérations avec des « petit o », il peut être préférable d'éviter d'utiliser cette notation dans les calculs, préférant la notation explicite $g(x)\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de limite nulle en a à la notation $\circ(g)$.

D.2. Fonctions équivalentes

Définition 15.41

On dit qu'une fonction f est équivalente à une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\, h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice 15.7 Prouver que : $x^2 - 2x - \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

Remarques

a. La relation « $f \underset{a}{\sim} g$ » se lit « f est équivalente à g au voisinage de a ».

b. Attention, contrairement à ce que l'on pourrait croire, deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point a ne sont pas nécessairement à peu près égales au voisinage de ce point. On peut juste dire qu'elles ont le même comportement, ou que leurs courbes représentatives ont la même allure au voisinage de a. Par exemple, on peut vérifier que $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$; pourtant $(x^2 + x) - x^2 = x$ n'est pas proche de 0 au voisinage de $+\infty$.

c. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une équivalence en a^- ou en a^+ si $a \in \mathbb{R}$.

d. De la définition, on déduit de manière immédiate les propositions et théorèmes suivants :

Proposition 15.42

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque Attention. Encore une fois, même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

Théorème 15.43

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

Remarque Ce résultat est un des principaux résultats de ce paragraphe : pour déterminer la limite d'une fonction en un point, il suffit donc d'en déterminer un équivalent simple.

Exemple 15.8 Comme on a établit que $x^2 - 2x - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 2x - \ln(x)\right) = +\infty$$

Proposition 15.44

Si f et g sont deux fonctions équivalentes en a, il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Théorème 15.45

Si ℓ est un réel **non nul** et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 15.42.

b. Attention : il est fondamental de s'assurer que ℓ est un réel non nul pour dire qu'une fonction tendant vers ℓ en a est équivalente à ℓ en a. En effet, compte tenu de la définition, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, il existe une fonction h tendant vers 1 en a telle que, quand x est au voisinage de a :

$$f(x) = 0 \times h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

Par conséquent, seules les fonctions constantes nulles au voisinage de a sont équivalentes à la fonction nulle.

Proposition 15.46

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a :

$$f \underset{a}{=} \circ(g) \Longrightarrow f + g \underset{a}{\sim} g$$

Preuve On suppose que : $f \underset{a}{=} \circ(g)$. Il existe alors une fonction ε tendant vers 0 en a et un voisinage V_a de a tels que :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) + g(x) = g(x)\underbrace{[1 + \varepsilon(x)]}_{h(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

donc :

$$f + g \underset{a}{\sim} g$$

□

Remarque On déduit de cette proposition, de 15.38 et de 15.39 le résultat fondamental suivant :

Proposition 15.47

Une fonction polynôme non nulle est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ à son monôme de plus haut degré et en 0 à son monôme de plus base degré.

Autrement dit, si (n, p) est un couple d'entiers naturels tel que $p < n$ et si $P : x \mapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynôme telle que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n, \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

Proposition 15.48

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.

ii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} j$, alors : $f \times i \underset{a}{\sim} g \times j$.

iii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a : $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

iv. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

v. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g sont strictement positives au voisinage de a, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Il n'est pas possible de sommer des équivalents, car le résultat n'est pas correct en général. Par exemple, on a :

$$x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \quad \text{et} \quad -x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$$

mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) + (-x) = 1$ et 1 n'est pas équivalent à $x + (-x) = 0$ au voisinage de $+\infty$ (ni ailleurs). Pour déterminer un équivalent d'une somme, on pourra chercher à factoriser le terme prépondérant ou utiliser la définition.

Proposition 15.49 ▶ Équivalents de référence

Soit α un réel quelconque.

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 15-1

i. On démontre le premier résultat, le deuxième se démontre de manière analogue. Il suffit de poser, pour tout réel $M > 0$, $\alpha = \dfrac{1}{M}$ et, pour $M \leqslant 0$, $\alpha = 1$ pour écrire, grâce à la croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in \,]0, \alpha[\,,\ \frac{1}{x} > M$$

ce qui signifie bien que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ii. ▶ Si $M \geqslant 0$, on pose $A = \sqrt[n]{M}$ et si $M < 0$, on pose $A = 0$. La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, A \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > A,\ x^n > M$$

ce qui signifie bien que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

▶ Pour tout réel M, on pose $A = M^2$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R} \ /\ \forall x > A,\ \sqrt{x} > M$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Correction de l'exercice 15-2

1. (b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'|$$

et donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \tag{15.1}$$

De plus, comme f admet deux limites finies ℓ et ℓ' en a, on a, par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \begin{cases} \exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[\cap \mathcal{D}_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \exists\, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[\cap \mathcal{D}_f,\ |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$$

Posons alors : $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. On a alors, en choisissant un réel x quelconque appartenant à $]a-\alpha, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f$ (qui n'est pas vide car f est supposée définie sur un voisinage épointé de a)

$$|\ell - f(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell'| < \varepsilon$$

et donc :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R}_+^*,\ |\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon}$$

(b) Supposons que : $\ell \neq \ell'$. On a alors :

$$|\ell - \ell'| > 0$$

et alors, d'après le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$:

$$|\ell - \ell'| > |\ell - \ell'|$$

ce qui est absurde et nous permet de conclure :

$$\boxed{\ell = \ell'}$$

2. Comme f tend vers $+\infty$ en a, on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) > \ell + 1$$

ce qui suffit pour affirmer que :

$$\boxed{f \text{ ne peut tendre ni vers un réel } \ell, \text{ ni vers } -\infty}$$

N.B. On montre de même qu'une fonction ne peut tendre vers $-\infty$ en a et avoir une autre limite ℓ (réelle ou égale à $+\infty$) en a.

Correction de l'exercice 15-3

On remarque tout d'abord que la fonction $x \mapsto \dfrac{3-x}{x+2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et qu'elle est positive uniquement sur $]-2,3]$ donc, comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, f est définie sur $]-2,3]$ donc il est pertinent de chercher la limite en 2.
De plus, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{3-x}{x+2}$ est une fonction rationnelle définie en 2, on a, d'après l'exemple 16.5 :

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-x}{x+2} = \frac{3-2}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Par ailleurs, d'après 15.10, on a :

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 15-4

On a déjà vu précédemment que f est définie sur $]-2,3]$, donc il est pertinent de rechercher la limite de f en -2. De plus, on a :

$$\lim_{x \to -2^+} (3-x) = 5 > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -2^+} (x+2) = 0^+$$

donc :

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$$

et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (*cf.* 15.16), on conclut :

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = +\infty$$

Correction de l'exercice 15-5

- Comme -1 et 2 sont racines évidentes de $x \mapsto 2x^2 - 2x - 4$ et comme 1 et 2 sont racines évidentes de $x \mapsto x^2 - 3x + 2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\},\ g(x) &= \frac{2(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

  Or, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{2(x+1)}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie en 2, on a :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{2 \times (2+1)}{2-1} = 6$$

  Comme $g(2) = 6$, on a donc :

$$\lim_{x \to 2} g(x) = g(2)$$

  ce qui prouve que g est continue en 2.

- On a :

$$\lim_{x \to 1} 2(x+1) = 4, \quad \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} (x-1) = 0^-$$

  donc :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x+1)}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x+1)}{x-1} = -\infty$$

  ce qui suffit pour affirmer que g n'est pas continue en 1.

Correction de l'exercice 15-6

On commence par remarquer que, par définition :

$$f(I) = \{f(x),\, x \in I\}$$

ce qui signifie que tout élément de $f(I)$ admet au moins un antécédent par f dans I, donc que f est surjective de I sur $f(I)$. De plus, comme f est strictement croissante sur I, on a :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \begin{cases} x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \\ x > y \Longrightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$$

et donc :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

ce qui prouve que f est injective sur I. Ainsi, f est bijective de I sur $f(I)$ (on notera avec intérêt que la continuité n'intervient pas dans cette part du résultat).
De plus, comme f est croissante sur $I = [a,b]$, on a immédiatement :

$$\forall x \in I,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

donc :

$$f(I) \subset [f(a), f(b)]$$

Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et comme f est continue sur $I = [a,b]$, tout élément de $[f(a), f(b)]$ admet au moins un antécédent par f dans I, donc :

$$[f(a), f(b)] \subset f(I)$$

ce qui nous permet finalement d'affirmer que : $f(I) = [f(a), f(b)]$.

Correction de l'exercice 15-7

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 - 2x - \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

De plus on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$$

ce qui nous permet de conclure :

$$x^2 - 2x - \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$$

Sommaire