# 14 Généralités sur les fonctions

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

Les notions abordées dans cette partie ont été abordées en grande partie dans le secondaire et sont à peine approfondies. C'est pourquoi le lecteur ayant des difficultés sur les points abordés ici à se reporter à un manuel de terminale.
Dans l'ensemble du chapitre, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

## A. Définitions

### A.1. Notions de base sur les fonctions

**Définition 14.1**

On dit que $f$ est une **fonction** réelle d'une variable réelle si $f$ est une relation associant à tout réel $x$ au plus un réel $y$. Dans ce cas :

*i.* si $y$ est un réel associé au réel $x$ par $f$, $y$ est appelé **image** de $x$ par $f$ et on note $y = f(x)$,

*ii.* si $y$ et $x$ sont deux réels tels que $y = f(x)$, on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$ par $f$,

*iii.* l'ensemble des réels ayant une image par $f$ est appelé **ensemble de définition** de $f$ et noté $\mathcal{D}_f$,

*iv.* l'ensemble $\{f(x),\ x \in \mathcal{D}_f\}$ est appelé **ensemble image** de $f$,

*v.* l'ensemble $\{(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D}_f\}$ est appelé **graphe** de $f$.

**Remarques**

**a.** Comme on n'envisage dans ce chapitre que des fonctions réelles d'une variable réelle, on parlera plus simplement de fonction.

**b.** Si $f$ est une fonction telle que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, tout réel a exactement une image par $f$, donc $f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**c.** Il est équivalent de dire « la fonction $f$ définie sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ » et « l'application $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ ».

**Définition 14.2**

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble contenant un réel $a$. On dit que $a$ est un **zéro** de $f$ si : $f(a) = 0$.

### A.2. Fonctions majorées, minorées, bornées

Dans tout ce paragraphe, $f$ désigne une fonction et $I$ un ensemble inclus dans $\mathcal{D}_f$.

**Définition 14.3**

*i.* On dit que $f$ est **majorée** sur $I$ s'il existe un réel $M$ tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$$

Dans ce cas, un tel réel $M$ est appelé **majorant** de $f$.

*ii.* On dit que $f$ est **minorée** sur $I$ s'il existe un réel $m$ tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$$

**Définition 14.4**

On dit que $f$ est **bornée** sur $I$ si elle est majorée et minorée sur $I$.

**Remarques**

**a.** La fonction $f$ est bornée sur $I$ si et seulement si la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est majorée sur $I$.

**b.** Si $f$ admet un majorant $M$ sur $I$, elle admet une infinité de majorant, puisque tout réel supérieur ou égal à $M$ est aussi un majorant de $f$.

**Théorème 14.5**

*i.* Si $f$ est **majorée** sur $I$, $f$ admet un plus petit majorant, appelé **borne supérieure** de $f$, noté $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x\in I} f(x)$. De plus on a :

$$\sup_I f = \sup\{f(x), x \in I\}$$

*ii.* Si $f$ est **minorée** sur $I$, $f$ admet un plus grand minorant, appelé **borne inférieure** de $f$, noté $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x\in I} f(x)$. De plus on a :

$$\inf_I f = \inf\{f(x), x \in I\}$$

**Définition 14.6**

Soit $a$ un élément de $I$.

*i.* On dit que $f$ admet un **maximum global** (ou absolu) sur $I$ en $a$ si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$$

Dans ce cas, on note $f(a) = \max\limits_I f$ ou $f(a) = \max\limits_{x\in I} f(x)$.

*ii.* On dit que $f$ admet un **minimum global** (ou absolu) sur $I$ en $a$ si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a)$$

Dans ce cas, on note $f(a) = \min\limits_I f$ ou $f(a) = \min\limits_{x\in I} f(x)$.

*iii.* On dit que $f$ admet un **extremum global** (ou absolu) sur $I$ en $a$ si $f$ admet un maximum ou un maximum global en $a$.

**Remarques**

**a.** Attention à ne pas confondre un extremum $f(a)$ de $f$ et le point $a$ où celui-ci est atteint : $a$ n'est pas un extremum de $f$.

**b.** On dira plus simplement que $f$ a un maximum global (respectivement un minimum global) si elle admet un maximum gloabl (resp. un minimum global) sur $\mathcal{D}_f$.

**c.** Si $f$ admet un maximum (respectivement un minimum) global en $a$, elle est donc majorée (resp. minorée) et $f(a)$ est un majorant (resp. un minorant) atteint par $f$.

**d.** Par conséquent, si $f$ admet un maximum (respectivement un minimum) gloabl sur $I$, $f$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) sur $I$ et $\max\limits_I f = f(a)$ (resp. $\min\limits_I f = f(a)$).

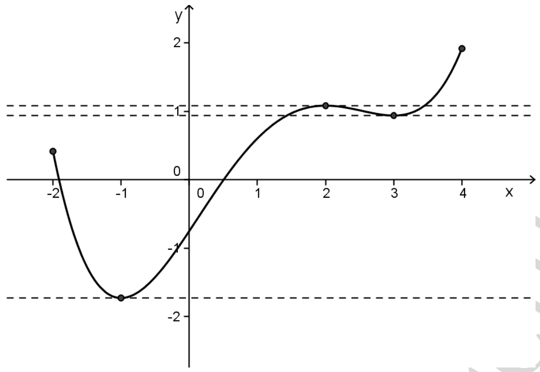
**e.** En revanche, une fonction peut être majorée (respectivement minorée) sans admettre de maximum (resp. de minimum). C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui est majorée par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ mais n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}_-^*$, et minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Définition 14.7**

Soit $a$ un élément de $I$. S'il existe un réel $\alpha$ strictement positif tel que la restriction de $f$ à $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ admette un maximum (resp. un minimum) global en $a$, on dit que $f$ admet un maximum (resp. un minimum) local sur $I$ en $a$.

**Remarque** Si $f$ admet un extremum global en $a$, alors cet extremum est aussi un extremum local ; en revanche, la réciproque est fausse.

**Exemple 14.1** Le graphe suivant est celui d'une fonction $f$ définie sur $[-2, 4]$.




On peut voir sur le graphique que $f$ admet un maximum local en $-2$, en 2 et en 4 et un minimum local en $-1$ et 3. De plus, elle admet un maximum global en 4 et un minimum global en $-1$.

## B. Sens de variation d'une fonction

Dans cette partie, $I$ est une partie de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Définition 14.8**

Étant donnée une fonction $f$, on dit que :

*i.* $f$ est **croissante** sur $I$ si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,

*ii.* $f$ est **strictement croissante** sur $I$ si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

*iii.* $f$ est **décroissante** sur $I$ si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,

*iv.* $f$ est **strictement décroissante** sur $I$ si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

*v.* $f$ est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur $I$ si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante) sur $I$.

**Exemple 14.2** Le lecteur pourra vérifier avec la définition que :

- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{2n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$,
- la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ ; attention, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

**Proposition 14.9**

*i.* Si $f$ est $g$ sont deux fonctions croissantes (respectivement strictement croissantes) sur $I$, alors $f + g$ est croissante (respectivement strictement croissante) sur $I$.

*ii.* Si $f$ est $g$ sont deux fonctions décroissantes (respectivement strictement décroissantes) sur $I$, alors $f + g$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $I$.

**Proposition 14.10**

*i.* si $f$ et $g$ sont deux fonctions croissantes et positives sur $I$, alors $f\,g$ est croissante sur $I$.

*ii.* Si $f$ et $g$ sont deux fonctions décroissantes et positives sur $I$, alors $f\,g$ est décroissante sur $I$.

**Remarque** Attention : on ne peut en général rien dire quant à la monotonie de $f\,g$ si $f$ et $g$ ont la même monotonie mais ne sont pas de signe constant sur $I$. Par exemple, on peut vérifier que les fonctions $f : x \mapsto -x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sont toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}^-$, alors que la fonction $f\,g : x \mapsto -x^5$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

**Proposition 14.11**

*i.* Si $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$ et si $\lambda$ est un réel positif, alors $\lambda f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$.

*ii.* Si $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I$ et si $\lambda$ est un réel strictement positif, alors $\lambda f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I$.

*iii.* Si $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$ et si $\lambda$ est un réel négatif, alors $\lambda f$ est décroissante (resp. croissante) sur $I$.

*iv.* Si $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I$ et si $\lambda$ est un réel strictement négatif, alors $\lambda f$ est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur $I$.

**Proposition 14.12**

Soient $f$ une fonction définie sur $I$ et à valeurs dans une partie $J$ de $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction définie sur $J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*i.* Si $f$ et $g$ ont la même monotonie respectivement sur $I$ et $J$, alors $g \circ f$ est croissante sur $I$.

*ii.* Si $f$ et $g$ ont des monotonies contraires respectivement sur $I$ et $J$, alors $g \circ f$ est décroissante sur $I$.

**Exercice 14.1**

1. Démontrer la proposition 14.9.
2. Démontrer la proposition 14.10.
3. Démontrer la proposition 14.11.
4. Démontrer la proposition 14.12.

**Proposition 14.13**

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ et $(x, y)$ un couple d'éléments de $I$.

*i.* Si $f$ est **strictement croissante** sur $I$, alors :

$$x < y \iff f(x) < f(y)$$

*ii.* Si $f$ est **strictement décroissante** sur $I$, alors :

$$x < y \iff f(x) > f(y)$$

**Remarque** Ce résultat est très utile pour comparer deux nombres : si $f$ est une fonction strictement monotone sur $I$, pour comparer deux nombres $x$ et $y$ appartenant à $I$, il suffit de comparer $f(x)$ et $f(y)$.

## C. Fonctions paires, impaires, périodiques

**Définition 14.14**

On suppose que $I$ est une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0 (c'est-à-dire telle que, si $x$ appartient à $I$, alors $-x$ appartient à $I$). On dit que :

*i.* $f$ est **paire** sur $I$ si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$,

*ii.* $f$ est **impaire** sur $I$ si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

**Exemples 14.3**

**a.** Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont impaires sur leurs ensembles de définition respectifs.

**b.** Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont paires sur $\mathbb{R}$.

**Remarques**

**a.** On peut remarquer que, si $f$ est une fonction impaire définie en 0, alors nécessairement : $f(0) = 0$.

**b.** Pour étudier une fonction $f$ paire ou impaire sur un ensemble $I$ centré en 0, il suffit donc d'étudier $f$ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

**Définition 14.15**

On suppose que $I$ est une partie de $\mathbb{R}$ et que $T$ est un réel tel que, si $x$ appartient à $I$, alors $x + T$ appartient à $I$.
On dit que $f$ est périodique et que $T$ est une période de $f$ (ou plus simplement que $f$ est $T$–périodique) si :

$$\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$$

## D. Fonctions convexes, concaves

Dans toute cette partie, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. De plus, toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur un même intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $I$, on dit que la courbe représentative de $f$ est au-dessus de celle de $g$ si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant g(x)$$

De même, on dit que la courbe représentative de $f$ est en dessous de celle de $g$ si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$$

**Définition 14.16**

*i.* On dit que $f$ est **convexe** sur $I$ si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

*ii.* On dit que $f$ est **concave** sur $I$ si $-f$ est convexe sur $I$, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

**Remarques**

**a.** Dans ces définitions, seules les valeurs de $\lambda$ appartenant à $]0,1[$ importent, puisque, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, il y a toujours égalité.

**b.** Autrement dit, une fonction convexe est une fonction dont le graphe est en dessous de ses cordes et une fonction concave est une fonction dont le graphe est au dessus de ses cordes.

Ci-dessous un exemple de représentation graphique d'une fonction convexe ainsi que de la corde $[AB]$ joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ :

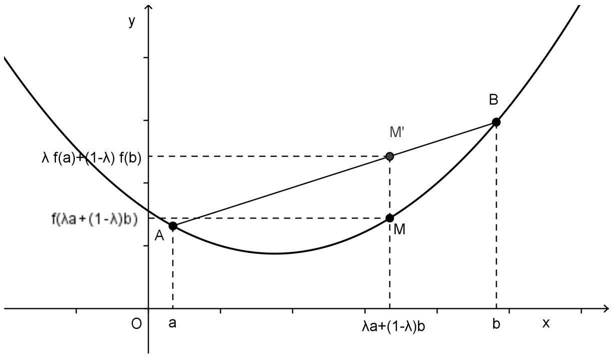



Figure 14.1 – Exemple de représentation graphique d'une fonction convexe

**Définition 14.17**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a$ un élément de $I$ n'étant pas une borne de $I$. On dit que le point de coordonnées $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $f$ s'il existe un réel $\alpha$ strictement positif tel que l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ soit inclus dans $I$ et tel que :

- ou bien $f$ est convexe sur $]a-\alpha, a]$ et concave sur $[a, a+\alpha[$,
- ou bien $f$ est concave sur $]a-\alpha, a]$ et convexe sur $[a, a+\alpha[$.

# E. Fonctions de référence

## E.1. Fonctions affines

**Définition 14.18**

On dit que $f$ est une **fonction affine** si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

**Remarque** Le graphe de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est donc la droite d'équation $y = ax + b$.

**Proposition 14.19**

Soient $a, a', b, b'$ quatre réels tels que : $a \neq a'$. L'unique droite passant par les points de coordonnées respectives $(a, b)$ et $(a', b')$ a pour équation réduite

$$y = \frac{b' - b}{a' - a}\,(x - a) + b$$

## E.2. La fonction valeur absolue

**Définition 14.20**

La fonction **valeur absolue** est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée $|\cdot|$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Exemple 14.4** La valeur absolue de 3 est : $|3| = 3$, la valeur absolue de $-3$ est : $|-3| = 3$.

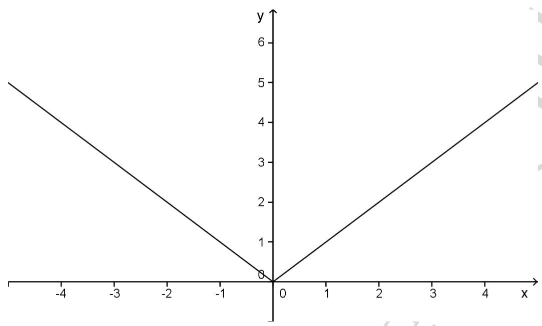



FIGURE 14.2 – Représentation graphique de la fonction valeur absolue

**Remarques**

**a.** Si $a$ et $b$ sont deux réels, $|a-b|$ est la distance entre $a$ et $b$ : c'est la longueur du segment $[a, b]$.

**b.** Il découle de manière immédiate de la définition que, pour tout réel $x$ : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

**c.** En particulier, on peut remarquer que, pour tout réel $x$ :

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{et} \quad |x|^2 = x^2$$

**Théorème 14.21**

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :
*i.* $|x| \geqslant 0$, *ii.* $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, *iii.* $|xy| = |x|\,|y|$.

**Preuve**

*i.* Si $x$ est positif ou nul, $|x| = x$ est positif ou nul ; si $x$ est négatif, $|x| = -x$ est positif.

*ii.* Si $x$ n'est pas nul, $-x$ n'est pas nul et donc : $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

*iii.* Soient $x$ et $y$ deux réels.

— Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ et : $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
— Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$, alors $xy \leqslant 0$ et : $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$.
— Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et : $|xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|$.
— Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$ et : $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$.

□

**Théorème 14.22 ▶ Inégalité triangulaire**

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

**Théorème 14.23 ▶ Seconde inégalité triangulaire**

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

**Remarque** Il arrive parfois que la preuve de ce résultat soit demandée.

**Exercice 14.2**

1. Démontrer le théorème 14.22.
2. Démontrer le théorème 14.23.

## E.3. La fonction partie entière

**Théorème 14.24**

Pour tout réel $x$, il existe un unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ainsi définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est appelée fonction **partie entière**. Pour tout réel $x$, $\lfloor x \rfloor$ est appelé partie entière de $x$.

**Remarque** La partie entière d'un réel $x$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$.

**Preuve** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $\mathbb{Z}$ n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$, donc il existe un entier $p$ tel que : $p \leqslant x$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leqslant x\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et majorée, donc elle contient un plus grand élément $\lfloor x \rfloor$, ne dépendant que de $x$ et qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. □

**Exemple 14.5** La partie entière de $2,5$ est : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, la partie entière de $-2,5$ est : $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$.

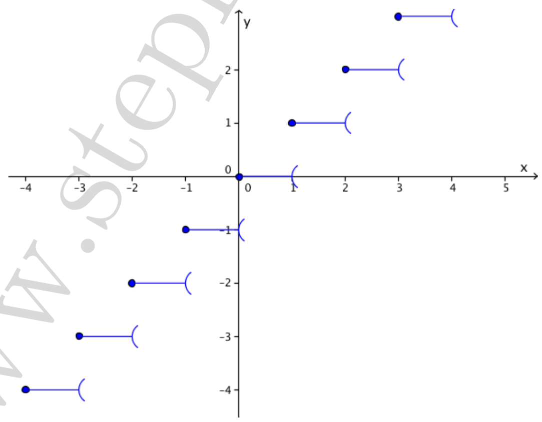



FIGURE 14.3 – Représentation graphique de la fonction partie entière

## E.4. Fonctions polynômes

Les résultats de ce paragraphe sont admis.

**Définition 14.25**

*i.* On dit que $f$ est une **fonction polynôme** si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un entier naturel $n$ et une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

Les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés coefficients de $f$.

*ii.* On dit que $f$ est une fonction polynôme sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ si $f$ est la restriction à $I$ d'une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 14.26**

Soit $P$ une fonction polynôme telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

$P$ est constante nulle si et seulement si et seulement si ses coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont tous nuls.

**Définition 14.27**

Soit $P$ une fonction polynôme telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

Si $P \neq 0$, on appelle **degré** de $P$ la plus grande valeurs de $k$, notée $\deg(P)$, telle que $a_k \neq 0$.
Si $P = 0$, on pose par convention : $\deg(P) = -\infty$.

**Définition 14.28**

Soit $P$ une fonction polynôme. On dit qu'un réel $\lambda$ est **racine** de $P$ si $\lambda$ est un zéro de $P$, c'est-à-dire si : $P(\lambda) = 0$.

**Proposition 14.29**

Soit $P$ une fonction polynôme. Le réel $\lambda$ est racine de $P$ si et seulement s'il existe une fonction polynôme $Q$ telle que :

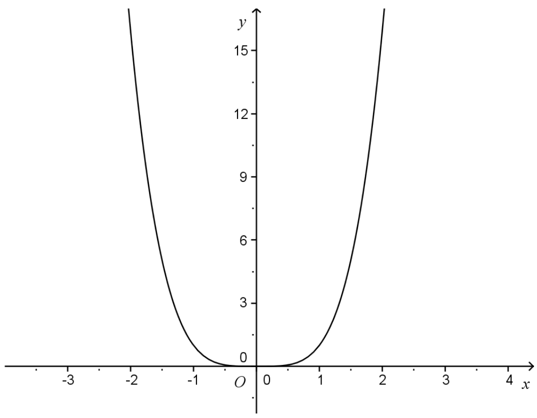
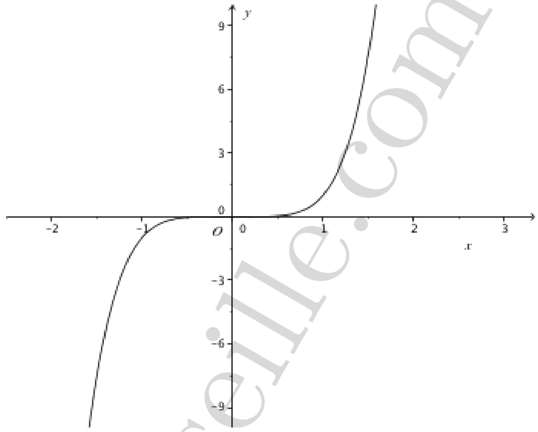
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - \lambda)\, Q(x)$$

**Remarque** Si le réel $\lambda$ est racine de la fonction polynôme $P$, on dit alors que la fonction polynôme $x \mapsto x-\lambda$ divise $P$.

**Proposition 14.30**

Soit $P$ une fonction polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[x]$. Si $P$ admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P$ est constante nulle.

**Allure de la courbe représentative de $x \mapsto x^n$**

| Cas où $n$ est pair (ici $n = 4$) | Cas où $n$ est pair (ici $n = 5$) |
|---|---|
|  |  |

## E.5. Trinômes du second degré

**Définition 14.31**

Une fonction $f$ est appelée fonction trinôme du second degré si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un triplet $(a, b, c)$ de réels tel que $a \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

**Définition 14.32**

Soit $(a, b, c)$ un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. Étant donnée la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de $P$.

**Théorème 14.33**

Soit $(a, b, c)$ un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. On considère la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

*i.* Si $\Delta > 0$, $P$ admet exactement deux racines réelles distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$P(x)$ est alors du signe de $a$ si $x < x_1$ ou $x > x_2$ et du signe de $-a$ si $x \in ]x_1, x_2[$.

*ii.* Si $\Delta = 0$, $P$ admet une unique racine réelle, qui est : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
$P(x)$ est alors du signe de $a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

*iii.* Si $\Delta < 0$, $P$ n'admet pas de racine réelle. $P(x)$ est alors du signe de $a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Preuve**

Comme $a \neq 0$, on écrit $P(x)$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

*i.* Si $\Delta > 0$, alors :

$$P(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Finalement, l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus, on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

*ii.* Si $\Delta = 0$, alors :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Finalement, l'équation $P(x) = 0$ admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme unique solution et $P(x)$ est du signe de $a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

*iii.* Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ n'est jamais nul et toujours du signe de $a$.

□

## E.6. Fonctions rationnelles

**Définition 14.34**

*i.* On dit que $f$ est une **fonction rationnelle** s'il existe deux fonctions polynômes $P$ et $Q$ telles que :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ Q(x) \neq 0\} \quad \text{et} \quad \forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

*ii.* On dit que $f$ est une fonction rationnelle sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ si $f$ est la restriction à $I$ d'une fonction rationnelle.

**Exemples 14.6** **a.** La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - x + 3}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** La fonction inverse est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^*$.

**Remarque** Attention à ne pas confondre quotient et fonction rationnelle.
Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + x^2 - 1}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, n'est pas une fonction rationnelle, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + x^2 - 1$ n'est pas une fonction polynôme.

## E.7. Le logarithme népérien

Les résultats de ce paragraphe et des suivants sont présentés ici pour faire une synthèse de toutes les fonctions de référence. Ils seront précisés et démontrés dans le chapitre 17.

**Théorème 14.35**

Il existe une unique fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Cette fonction est appelée **logarithme népérien** et notée ln.

**Proposition 14.36**

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 14.37**

Soient $a, b$ deux réels strictement positifs et $n$ un entier relatif. On a :

*i.* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *ii.* $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ *iii.* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

*iv.* $\ln(a^r) = r\ln(a)$

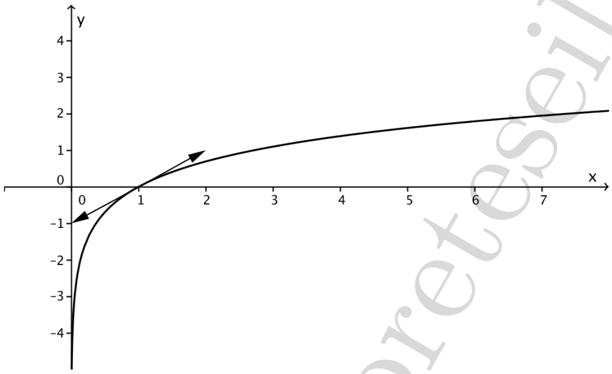



Figure 14.4 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln(x)$

## E.8. La fonction exponentielle

**Définition 14.38**

La réciproque de la fonction ln est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, appelée **fonction exponentielle** et notée exp ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

**Remarques**

**a.** Il découle immédiatement de la définition que : $\exp(0) = 1$.

**b.** Le nombre $\exp(1)$ est plus simplement noté e et il peut être utile de savoir que : $\mathrm{e} \simeq 2,72$, ou au moins que : $2 < \mathrm{e} < 3$.

**Proposition 14.39**

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Proposition 14.40**

Soient $a, b$ deux réels et $n$ un entier relatif. On a :

*i.* $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ *ii.* $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ *iii.* $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

*iv.* $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

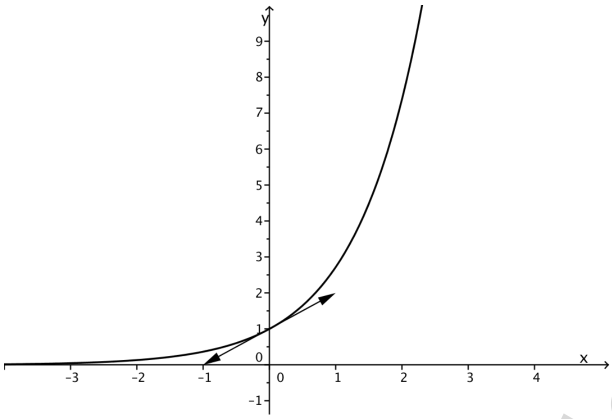



FIGURE 14.5 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

## E.9. Les fonctions puissances

Dans ce paragraphe, $a$ désigne un réel quelconque.

**Définition 14.41**

On appelle fonction puissance d'exposant $a$ la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f_a(x) = \mathrm{e}^{a \ln(x)}$$

On note aussi plus simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f_a(x) = \mathrm{e}^{a \ln(x)} = x^a$$

**Proposition 14.42**

Pour tout réel $a$ et pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$\ln(x^a) = a \ln(x)$$

**Proposition 14.43**

Soient $a, b$ deux réels, $x, y$ deux réels strictement positifs. On a :

*i.* $x^{a+b} = x^a \, x^b$ *ii.* $x^{-a} = \dfrac{1}{x^{-a}}$ *iii.* $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$

*iv.* $(x^a)^b = x^{ab}$ *v.* $(xy)^a = x^a \, y^a$ *vi.* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

# F. Correction des exercices

### Correction de l'exercice 14-1

1. On démontre le point *i*, le point *ii* est analogue. On suppose que $f$ et $g$ sont croissantes sur $I$. On a donc :

$$\forall (x, y) \in I^2, \; x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) \\ g(x) \leqslant g(y) \end{cases}$$

et donc, en « additionnant ces deux inégalités » :

$$\forall (x, y) \in I^2, \; x < y \Rightarrow f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$$

donc $f + g$ est croissante sur $I$.
Le cas où $f$ et $g$ sont strictement croissantes sur $I$ se démontre de façon analogue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

2. On démontre le point *i*, le point *ii* est analogue. On suppose que $f$ et $g$ sont croissantes et positives sur $I$. On a donc :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant f(x) \leqslant f(y) \\ 0 \leqslant g(x) \leqslant g(y) \end{cases}$$
et donc, en « multipliant ces deux inégalités » (les termes étant tous positifs !) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x)\, g(x) \leqslant f(y)\, g(y)$$
donc $f\,g$ est croissante sur $I$.
3. *i.* Supposons que $f$ soit une fonction croissante sur $I$ et que $\lambda$ soit un réel positif. On a alors :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
et donc, en mutlipliant par $\lambda$ (qui est positif) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \lambda f(x) \leqslant \lambda f(y)$$
donc $\lambda f$ est croissante sur $I$. Le cas où $f$ est décroissante est analogue.

   *ii.* Se démontre comme le point précédent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

   *iii.* Supposons que $f$ soit une fonction croissante sur $I$ et que $\lambda$ soit un réel négatif. On a alors :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
et donc, en mutlipliant par $\lambda$ (qui est négatif, donc on change le sens des inégalités) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \lambda f(x) \geqslant \lambda f(y)$$
donc $\lambda f$ est décroissante sur $I$. Le cas où $f$ est décroissante est analogue.

   *iv.* Se démontre comme le point précédent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
4. *i.* On traite le cas où $f$ et $g$ sont décroissantes respectivement sur $I$ et $J$, le cas où elles sont croissantes se traitant de façon analogue. On a donc :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \\ \forall (u,v) \in J^2,\ u < v \Rightarrow g(u) \geqslant g(v) \end{cases}$$
et donc, comme, pour tout couple $(x,y)$ d'éléments de $I$, $u = f(y)$ et $v = f(x)$ appartiennent à $J$ :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$$
donc $g \circ f$ est croissante sur $I$.

   *ii.* On traite le cas où $f$ est décroissante sur $I$ et $g$ est croissante sur $J$, le second cas se traitant de façon analogue. On a donc :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \\ \forall (u,v) \in J^2,\ u < v \Rightarrow g(u) \leqslant g(v) \end{cases}$$
et donc, comme, pour tout couple $(x,y)$ d'éléments de $I$, $u = f(y)$ et $v = f(x)$ appartiennent à $J$ :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow g \circ f(y) \leqslant g \circ f(x)$$
donc $g \circ f$ est décroissante sur $I$.

### Correction de l'exercice 14-2

1. Pour éviter le « problème » de la valeur absolue, on compare donc les carrés. Pour tout couple $(x,y)$ de réels, on a :
$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy \end{aligned}$$
et donc, (en rappelant que $t \leqslant |t|$ pour tout réel $t$) :
$$\begin{aligned} |x+y|^2 &\leqslant x^2 + y^2 + 2\,|xy| \\ &\geqslant (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$
ce qui prouve le résultat attendu puisque la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |a + b| \leqslant |a| + |b|$$

et donc, en posant $a = x - y$ et $b = y$ :

$$|x| \leqslant |x - y| + |y|$$

soit encore :

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

En échangeant $x$ et $y$, on a aussi :

$$|y| - |x| \leqslant |y - x|$$

et donc, comme $|y - x| = |x - y|$ :

$$-|y - x| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

ce qui prouve le résultat attendu.

# Sommaire