12 Réduction des matrices carrées

ECG Maths Appliquées
Semestre 3

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie pouvait être représenté matriciellement et que cette caractérisation matricielle pouvait, dans certains cas, simplifier l'étude.
Nous en venons désormais à nous demander dans quelle mesure il est possible de simplifier encore cette étude, en choisissant une base dans laquelle la matrice associée à f serait la plus simple possible. Plus précisément, le but de ce chapitre est d'étudier à quelles conditions un endomorphisme peut être représenté par une matrice diagonale.

A. Changement de base

On a vu dans les chapitres précédents qu'un vecteur (respectivement une application linéaire) peut être caractérisé par ses coordonnées (respectivement par sa matrice représentative) dans une base (respectivement un couple de bases).
On peut cependant se demander ce qu'il advient si l'on change les bases considérées. Ainsi, étant donné un vecteur x d'un espace vectoriel E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, existe-t-il un lien entre les coordonnées respectives de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
Le but de ce paragraphe est de répondre à cette question.

A.1. Matrice de passage

Définition 12.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux bases de E.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de ε_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que l'on a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} e_i$$

La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est appelée **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

Remarques

a. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de passage de $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donc obtenue en écrivant en colonne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & & & \varepsilon_j & & \varepsilon_n & \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,j} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{i,j} & \cdots & \alpha_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{n,j} & \cdots & \alpha_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

b. Pour faire le lien avec le chapitre précédent, on peut remarquer que la matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la matrice représentative dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) = \varepsilon_i$$

c. On peut également remarquer que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\mathrm{Id}_E$, mais on prendra garde à l'ordre des bases.

Exemple 12.1 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

La famille $\mathcal{C}$ est une base de E (elle est libre car échelonnée en degrés et formée de trois vecteurs non nuls de E, qui est de dimension 3). La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition 12.2

Soit E un espace vectoriel de dimension non nulle. Si $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ de E, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

Preuve On a remarqué précédemment que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de l'endomorphisme identique de E relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Comme Id_E est un automorphisme de E, on en déduit que P est inversible et que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

ce qui prouve le résultat. □

Exercice 12.1 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

On a vu que $\mathcal{C}$ est une base de E et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Justifier que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et expliciter $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$.

A.2. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 12.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
Pour tout vecteur x de E, en notant $X_{\mathcal{B}}$ la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{C}}$ la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$, on a :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}$$

Preuve On suppose que $\dim(E) = n$ et on note :

$$\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},\ \mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, X_{\mathcal{B}} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},\ X_{\mathcal{C}} = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

On a alors :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j \varepsilon_j$$

donc :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j \right) e_i \end{aligned}$$

d'où, par unicité des coefficients de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j$$

soit finalement : $X_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_\mathcal{C}$.

□

Remarque Compte tenu de cette formule, si l'on connaît les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et que l'on cherche ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$, il faudra donc déterminer la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et utiliser la formule : $X_\mathcal{C} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} X_\mathcal{B}$.
On peut aussi résoudre l'équation $X_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_\mathcal{C}$, d'inconnue $X_\mathcal{C}$.

Exercice 12.2 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la base de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = 8x^2 - 3x + 3$$

Remarque En pratique, on se sert assez peu de cette proposition, mais elle est très importante pour le point suivant.

A.3. Changement de base et matrice représentative d'un endomorphisme

Théorème 12.4

Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et f un endomorphisme de E.
En notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{C}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

Preuve Soit x un élément de E. On note $X_\mathcal{B}$ et $Y_\mathcal{B}$ (respectivement $X_\mathcal{C}$ et $Y_\mathcal{C}$) les colonnes des coordonnées respectives de x et y dans $\mathcal{B}$ (respectivement dans $\mathcal{C}$). On note $M_\mathcal{B}$ (resp. $M_\mathcal{C}$) la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). On a donc :

$$X_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_\mathcal{C} \quad \text{et} \quad Y_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} Y_\mathcal{C}$$

d'où :

$$\begin{aligned} M_\mathcal{C} X_\mathcal{C} &= Y_\mathcal{C} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} Y_\mathcal{B} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ M_\mathcal{B} X_\mathcal{B} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ M_\mathcal{B}\ P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_\mathcal{C} \end{aligned}$$

Comme ce résultat est valable pour tout vecteur x de E, on en déduit, par unicité de la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\, M_{\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

□

Remarque Si l'on se souvient des propriétés du produit matriciel (et notamment de l'interprétation en terme de produit des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice), on peut assez bien retenir cette formule en remarquant que la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ associée à f dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est obtenue en écrivant, en colonne, les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et que :

- changer la base de l'espace vectoriel de départ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ consiste à modifier les vecteurs colonnes de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}$ donc à multiplier à droite par $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$,
- changer la base de l'espace vectoriel d'arrivée de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ consiste à modifier les vecteurs lignes de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}$ donc à multiplier à gauche par $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

A.4. Matrices semblables

Définition 12.5

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exercice 12.3 Soit A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.

Proposition 12.6

Soient E un espace vectoriel de dimension n, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A et B sont semblables si et seulement s'il existe un endomorphisme f de E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telles que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$$

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de 12.4.

Proposition 12.7

Deux matrices semblables ont le même rang.

Exercice 12.4 Démontrer la proposition 12.7.

B. Réduction des matrices carrées

Dans l'ensemble de ce paragraphe, on envisage une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La plupart des résultats étant analogues à ceux énoncés pour les endomorphismes, on se reportera au paragraphe précédent pour leur démonstration.

B.1. Élements propres d'une matrice carrée

Définition 12.8

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. On dit que λ est **valeur propre** de A s'il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.

ii. Si λ est valeur propre de A, on appelle **vecteur propre** de A associé à λ tout vecteur X **non nul** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.

iii. Si λ est valeur propre de A, l'ensemble $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; AX = \lambda X\}$ est appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

iv. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Remarques

a. Attention à ne pas oublier la condition $X \neq 0$ dans les deux premiers points de la définition : un vecteur propre est toujours non nul.

b. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ n'est pas exactement l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, puisqu'il contient le vecteur nul ; c'est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par la famille des vecteurs propres associés à λ, *i.e.* le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ contenant tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

c. On verra en exercice qu'une matrice carrée peut ne pas avoir de valeur propre.

Proposition 12.9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Remarques

a. En particulier, 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

b. Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss et triangulariser la matrice $A - \lambda I_n$. Les valeurs propres de A sont les valeurs de λ pour lesquelles *l'un au moins des coefficients diagonaux d'une réduit de Gauss* de $A - \lambda I_n$ est nul.

Proposition 12.10

Si T est une **matrice triangulaire**, les valeurs propres de T sont ses coefficients diagonaux.

Remarque Attention, ce résultat n'est vrai que pour une matrice triangulaire et les coefficients diagonaux d'une matrice M quelconque ne sont en général pas valeur propre de M.

Exercice 12.5 Démontrer la proposition 12.10.

Exercice 12.6 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B.2. Lien entre valeurs propres et polynôme annulateur

Proposition 12.11

Si P est un polynôme annulateur de A, alors les racines de P sont les seules valeurs propres possibles de A ; autrement dit :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(\lambda) = 0\}$$

Exemples 12.2

a. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que : $A^2 = I$, donc $x \mapsto x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de A. De plus, on a :

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc -1 et 1 sont effectivement valeur propre de A.

b. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que $B^2 = -I$. Ainsi, $x \mapsto x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de B, qui n'a pas de racine réelle. B n'admet donc pas de valeur propre réelle.

Remarques

a. Attention, de même que pour les endomorphismes, les racines d'un polynôme annulateur de A ne sont pas nécessairement valeur propre de A. Par exemple, le polynôme $x \mapsto x^2 - x$ est un polynôme annulateur de la matrice I_n, mais 0 n'est pas valeur propre de I_n.

b. Cette propriété est souvent très utile pour limiter l'étude de certains cas dans la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme, la méthode générale consistant à chercher les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

B.3. Propriétés des sous-espaces propres d'une matrice carrée

Proposition 12.12

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de A, si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{F}_i$ est une famille libre de vecteurs de $E_{\lambda_i}(A)$, alors la concaténation des familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ est libre.
En particulier, si $X_1, \dots, X_p$ sont des vecteurs propres de A associés à p valeurs propres distinctes, alors la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

Proposition 12.13

Si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet au plus n valeurs propres distinctes.

B.4. Matrices diagonalisables

Définition 12.14

On dit que A est **diagonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui lui soit semblable.

Proposition 12.15

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. A est diagonalisable,

ii. il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, *iii.* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$,

iv. la concaténation de bases respectives de $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque Pour démontrer qu'une matrice est diagonalisable, on utilise le plus souvent le points *iii*.

Exercice 12.7 Les matrices A et B suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème 12.16

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Le cas échéant, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de D (celles-ci se répétant autant de fois que la dimension de son sous-espace propre associé) et les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (la $j^{ème}$ colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre situé sur le $j^{ème}$ coefficient diagonal de D).

Proposition 12.17

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour que A soit diagonalisable, il **suffit** qu'elle admette n valeurs propres distinctes.
De plus, si A admet n valeurs propres distinctes, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

Exemples 12.3

a. Toute matrice diagonale est diagonalisable.

b. On a vu que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle, donc elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque Attention, il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et une matrice carrée d'ordre n peut être diagonalisable sans avoir n valeurs propres distinctes.

Théorème 12.18

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Proposition 12.19

Si A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et diagonalisable, si $\mathcal{B} = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Plus précisément, si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i, alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 12.8 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale puis déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

B.5. Application au calcul des puissances d'une matrice carrée

Proposition 12.20

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable. On considère une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et on note :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} \quad \text{où : } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Remarque Ce résultat se démontre de manière immédiate par récurrence, mais on peut également remarquer que, si A est la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ et si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et D^k sont les matrices associées à f^k respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, ce qui prouve que $D^k = P^{-1}A^kP$.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 12-1

$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, donc elle est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \\ x = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot (x+1) \\ x^2 = -\frac{5}{8} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (x+1) + \frac{1}{4} \cdot (4x^2 - 2x + 3) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{2} \cdot P_0 \\ e_1 = -\frac{1}{2} \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 \\ e_2 = -\frac{5}{8} \cdot P_0 + \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{4} \cdot P_2 \end{cases}$$

et donc :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 12-2

La colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

De plus, en notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a vu dans l'exercice 11.1 que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et alors :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$R = -2 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2$$

Correction de l'exercice 12-3

On suppose d'une part que A et B sont semblables, et d'autre part que B et C sont semblables. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$A = PBP^{-1} \quad \text{et} \quad B = QCQ^{-1}$$

donc on a :

$$\begin{aligned} A &= P\left(QCQ^{-1}\right)P^{-1} \\ &= (PQ)C\,(PQ)^{-1} \\ &= RCR^{-1} \end{aligned}$$

où l'on a posé : $R = PQ$. Ainsi A et C sont semblables.

Correction de l'exercice 12-4

Soit A et B deux matrices semblables appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$, de telle sorte que l'on a :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$$

Comme A et B sont semblables, il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ relativement à laquelle la matrice associée à f est B et on a donc :

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(f)$$

et donc :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$$

Correction de l'exercice 12-5

Soit T une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $t_1, \ldots, t_n$ les coefficients diagonaux de T.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de T si et seulement si $T - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $T - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $t_1 - \lambda, \ldots, t_n - \lambda$ et on sait qu'une matricde triangulaire n'est pas inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit que λ est valeur propre de T si et seulement s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $t_i - \lambda = 0$, donc tel que $\lambda = t_i$.

Correction de l'exercice 12-6

◇ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Or on a :

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ \det(A - \lambda I_2) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (2-\lambda)(4-\lambda) = 0\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de A sont 2 et 4. De plus, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff (A - 2I_2)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Enfin on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} AX = 4X &\iff (A - 4I_2)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff -x - y = 0 \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 4 est :

$$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

◇ La matrice B est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi on a :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}$$

De plus on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} BX = X &\iff (B - I_2)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff y = z = 0 \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Enfin on a, pour tout $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
BX = 2X &\iff (B - 2I_2)\,X = 0\\
&\iff \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} X = 0\\
&\iff \begin{cases}-x + 2y + z = 0\\-y = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}z = x\\y = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Correction de l'exercice 12-7

- On a vu dans l'exercice 10.6 que A possède deux valeurs propres, 2 et 4, et que leurs sous-espaces propres associés sont de dimension 1. On a donc :

$$\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 2 = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$$

  ce qui prouve que A est diagonalisable.

- De même, 1 et 2 sont les seules valeurs propres de B et on a :

$$\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 2 \neq \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

  ce qui prouve que B n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 12-8

On a vu dans l'exercice 10.7 que A est diagonalisable, donc il une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
De plus on a vu dans l'exercice 10.6 que les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que leurs sous-espaces propres associés respectifs sont :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (c'est la concaténation de bases des sous-espaces propres de A), donc que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$$

Sommaire