10 Applications linéaires

ECG Maths Appliquées
Semestre 3

Dans tout ce chapitre, E et F désigne deux espaces vectoriels et (n, p) est un couple d'entiers naturels non nuls.

A. Généralités

A.1. Définitions et propriétés

Définition 10.1

On dit qu'une application f de E dans F est linéaire si elle vérifie :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemples 10.1

a. Si $E = F$, l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ est une application linéaire de E dans E, appelée **identité** de E. Elle est aussi souvent notée Id s'il n'y a pas de risque de confusion quant à l'ensemble de définition.

b. Plus généralement, si $E = F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}$ est une application linéaire de E dans E, souvent appelée homothétie vectorielle.

Proposition 10.2

Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$f(0_E) = 0_F \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$$

Remarques

a. Il s'agit de résultats importants, à bien retenir.

b. Ces résultats sont des conséquences immédiates de la définition (avec $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$) et des propriétés fondamentales des calculs dans un espace vectoriel.

Proposition 10.3

Soit f une application de E dans F.

i. f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

ii. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n,\ \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque En pratique, pour démontrer qu'une application est linéaire, on utilisera le plus souvent le premier point de cette proposition, et non la définition.

Preuve *i.* ◇ Supposons que f soit linéaire. On a alors :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v) \tag{10.1}$$

et :

$$\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \tag{10.2}$$

En utilisant (10.1), on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$$

puis, en utilisant (10.2) :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \tag{10.3}$$

En prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et par ailleurs, en prenant $y = 0_E$ dans (10.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) &= f(\lambda x + 0_E) \\ &= \lambda f(x) + f(0_E) \\ &= \lambda f(x) + 0_F \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

ii. Se déduit du point i par récurrence.

□

Exercice 10.1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 10.2 Soit n et p deux entiers naturels non nuls et M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Montrer que l'application $f : X \mapsto MX$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition 10.4

On appelle :

i. **endomorphisme** de E toute application linéaire f de E dans E,

ii. **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.

Remarques

a. Un endomorphisme bijectif de E est appelé automorphisme de E (terme hors programme).

b. Une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est appelée forme linéaire sur E (terme hors programme).

c. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F)$ est inclus dans F, c'est-à-dire si : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$ (notion hors-programme).

A.2. Structure de l'ensemble des applications linéaires

Proposition 10.5

i. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.

ii. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un espace vectoriel.

iii. Si f est une application linéaire de E dans F et si g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Remarque Attention, l'ensemble des isomorphismes de E dans F n'est pas un espace vectoriel. En effet, il n'est pas stable par combinaison linéaire puisque, si f est un isomorphisme de E dans F, c'est aussi le cas de $-f$, mais pas de $f - f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$, qui n'est pas bijective de E dans F si $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$.

Définition 10.6

On dit que deux endomorphismes f et g de E commutent si : $f \circ g = g \circ f$.

Proposition 10.7

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Exercice 10.3 Démontrer la proposition 10.7.

Proposition 10.8

Soient f, g et h des endomorphismes de E. On a :

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \quad \text{et} \quad f \circ (g + h) = f \circ g + g \circ h$$

Remarque Ces deux résultats se démontrent de manière immédiate, le premier à l'aide de la définition de la composition et de la somme de deux applications (linéaires ou non), la seconde à l'aide de la définition de la composition et de la linéarité de f.

A.3. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 10.9

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle :

i. noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$,

ii. image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$.

Remarques

a. D'après la proposition 10.2, le noyau d'une application linéaire f de E dans F n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul de l'espace vectoriel E.
Lorsque $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, on dit que le noyau de f est « réduit au vecteur nul ».

b. Bien retenir que, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathrm{Ker}(f)$ est formé d'éléments de E, tandis que $\mathrm{Im}(f)$ est formé d'éléments de F.

Exercice 10.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

On a vu que f est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Proposition 10.10

Soit f une application linéaire de E dans F.

i. $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

ii. $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 10.5 Démontrer la proposition 10.10.

Proposition 10.11

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie et si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E, alors $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie et $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$; autrement dit :

$$E = \operatorname{Vect}((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) \Longrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n})$$

Exercice 10.6 Démontrer la proposition 10.11.

Théorème 10.12

Si E est de dimension finie non nulle admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est et si f est une application linéaire de E dans F, alors f est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Plus précisément, si f et g sont deux applications linéaires de E dans F telles que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors : $f = g$.

Preuve

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$ connues.
Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et alors, comme f est linéaire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

donc la connaissance de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ assure la connaissance de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

- Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) = g(e_i). \tag{10.4}$$

Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et alors, comme f et g sont linéaires :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)$$

et donc, d'après (10.4) :

$$f(x) = g(x)$$

donc, cette égalité étant valable pour tout $x \in E$: $f = g$.

□

A.4. Théorème du rang

Théorème 10.13 ▶ Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimensions finies et :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

L'entier $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est alors appelé rang de f et noté $\mathrm{rg}(f)$.

Remarques

a. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie, on a toujours : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ (puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F).

b. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie, on a toujours : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ (en application de 10.11).

B. Injectivité, surjectivité, bijectivité

B.1. Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives

Théorème 10.14

Soit f une application linéaire de E dans F.

i. f est injective sur E si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

ii. f est surjective de E dans F si et seulement si : $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 10.7 Démontrer la proposition 10.14.

Exercice 10.8 Soit E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et n un entier naturel non nul. On suppose que E est de dimension finie n et on considère une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E.

1. Montrer que f est injective sur E si et seulement si la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre dans F.
2. Montrer que f est surjective de E dans F si et seulement si la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est génératrice de F.
3. Montrer que f est bijective de E sur F si et seulement si la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une base de F.

Remarques

a. Attention, $\mathrm{GL}(E)$ n'est en général pas un espace vectoriel puisque la somme d'automorphismes de E n'est pas toujours un automorphisme de E.

b. Les propriétés énoncés ci-avant sont immédiates et la preuve en est laissée au soin du lecteur.

B.2. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Théorème 10.15

On suppose que E et F sont **de même dimension finie** et que f est une application linéaire de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective sur E,

ii. f est surjective de E sur F,

iii. f est bijective de E sur F.

Remarques

a. Ce théorème est très utile pour démontrer qu'une application linéaire f de E dans F est bijective. Si E et F sont de même dimension finie, on commence ainsi par étudier l'injectivité de f, car celle-ci est souvent plus simple à établir que la surjectivité.

b. Attention à la précision dans l'application de ce théorème. En particulier, on rappellera systématiquement que E et F sont de même dimension finie, et on évitera un vague « on est en dimension finie », qui ne veut pas dire grand chose

Preuve $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons que f soit injective. On a alors :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

De plus, comme E est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

donc, comme $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

et comme $\dim(E) = \dim(F)$:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$$

De plus, f est une application linéaire de E dans F, donc on a :

$$\mathrm{Im}(f) \subset F$$

et donc, avec l'égalité des dimensions :

$$\mathrm{Im}(f) = F$$

donc f est surjective.
$ii) \Longrightarrow iii)$ Supposons que f soit surjective de E sur F. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = F$$

De plus, comme E est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

donc, comme $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$$

d'où :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

donc f est injective. Étant injective et surjective de E sur F, f est donc bijective de E sur F.
$iii) \Longrightarrow i)$ Si f est bijective de E sur F, alors f est injective sur E, non ?

□

Proposition 10.16

On suppose que E est de **dimension finie** et que f est un endomorphisme de E. On a :

$$f \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{L}(E) \ / \ g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ ou } f \circ g = \mathrm{id}_E$$

De plus, si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$, alors f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Remarque Attention, cette proposition n'est valable que si E est de dimension finie.
Par exemple, si E est l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, si $\varphi : f \mapsto f'$ et si ψ est l'application qui à $f \in E$ associe sa primitive nulle en 0, alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ mais φ et ψ ne sont pas réciproques l'une de l'autre, ni même bijectives puisque $\psi \circ \varphi \neq \mathrm{id}_E$ (par exemple, si f est la fonction constante égale à 1, alors on a : $\psi \circ \varphi(f) = 0 \neq f$).

Preuve

- Supposons que f soit un automorphisme de E. Il existe alors un endomorphisme f de E tel que : $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_E$, donc tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

  Les deux cas étant similaires (f et g jouant des rôles symétriques), on suppose pour simplifier que : $g \circ f = \mathrm{id}_E$. On a alors, pour tout $x \in E$ et comme g est linéaire :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Longrightarrow f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

  donc, comme 0 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

  f est donc injectif. Comme E est de dimension finie, il en découle que f est bijective d'après (10.15). Il en découle alors :

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1}$$

  et donc :

$$g = f^{-1}$$

□

C. Matrice d'une application linéaire

C.1. Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Dans ce paragraphe, on suppose que E et F sont de dimensions finies non nulles, respectivement égales à p et n. On considère également une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de E et une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de F.

Définition 10.17

Soit f une application linéaire de E dans F. On envisage les familles $(m_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}, \ldots, (m_{i,p})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de réels telles que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \varepsilon_i$$

Avec ces notations, la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée **matrice de f** relativement aux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (ou matrice représentative de f de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$) et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

Remarques

a. En pratique, pour obtenir la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on calcule $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ puis on écrit en colonne leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

b. Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice M est plus simplement appelée matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

c. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ et où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de E et de F, on dit que M est la matrice canoniquement associée à f.

d. Quand on donne la matrice représentative d'une application linéaire, il est essentiel de préciser les bases considérées : si les bases changent, la matrice change !

Exemples 10.2

a. La matrice représentative de l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$ dans une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ est la matrice nulle.

b. La matrice représentative de l'endomorphisme identité de E dans une base quelconque de E est la matrice identité I_p. Attention, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases distinctes de E, la matrice représentative de l'endomorphisme identité de E n'est pas égale à la matrice I_p.

c. Si $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathbb{R}^2$ et si f est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x],\ f(P) = (P(1), P(1) + P(-2))$$

alors on a, en notant (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$f(e_0) = (1,2), \quad f(e_1) = (1,-1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1,5)$$

donc la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques respectives de E et F est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

d. Si E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle n et si f est une forme linéaire sur E, la matrice représentative de f dans une base de E est une matrice ligne.

Théorème 10.18

L'application φ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui à une application f associe sa matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 10.9 Démontrer la proposition 10.18.

Remarques

a. En particulier, ce résultat prouve que, si E et F sont de dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance des images des vecteurs d'une base de E, que l'on peut déterminer à partir de sa matrice représentative.

b. Attention à la formulation : si l'on change de base, une matrice représentative représentera potentiellement plusieurs applications linéaires et une même application linéaire aura potentiellement plusieurs matrices représentatives différentes.

C.2. Liens entre opérations sur les applications linéaires et opérations matricielles

Théorème 10.19

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, respectivement égales à p et n.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
Soit f une application linéaire de E dans F et M sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ de E, en notant $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$; autrement dit :

$$\text{Si } MX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, \text{ alors : } f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \varepsilon_i$$

Preuve On note : $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Par définition de M, on a donc :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \varepsilon_i$$

Soit alors x un vecteur de E, X la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On note :

$$X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \quad \text{et} \quad MX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

On a donc :

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

et alors, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \varepsilon_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j \right) \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

□

Remarques

a. Attention à la formulation du résultat. Ainsi, il faudra veiller à ne pas confondre MX et $f(x)$, sauf si l'énoncé l'autorise.

b. De même, il ne faut pas dire que MX « représente » $f(x)$ sans mentionner de base.

c. L'intérêt principal de cette proposition apparaît dans la proposition suivante.

Proposition 10.20

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives p, n et r non nulles. Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F et G. On a :

i. $\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f+g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$

ii. $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$

iii. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$

Preuve

Les points i et ii ont déjà été établis dans la preuve de 10.18.
Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Pour simplifier, on note :

$$M_f = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f), \quad M_g = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g), \quad M_{g\circ f} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) \quad \text{et} \quad N = M_g M_f$$

Soit x un vecteur de E. On note :

$$y = f(x), \quad z = g(y)$$

et on note alors X, Y et Z les colonnes des coordonnées respectives de x, y et z dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.
D'après 10.20, on a d'une part, comme $y = f(x)$ et $z = g(y)$:

$$Y = M_f X, \quad Z = M_g Y$$

et d'autre part, comme $z = (g \circ f)(x)$:

$$Z = M_{g\circ f} X$$

donc :

$$\begin{aligned} M_{g\circ f} X &= M_g M_f X \\ &= NX \end{aligned}$$

Notons alors $\mathcal{B}_E = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. La dernière égalité étant valable pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, elle l'est en particulier pour les colonnes $X_1, \dots, X_p$ représentatives de $e_1, \dots, e_p$ dans la base $\mathcal{B}_E$, c'est-à-dire pour les vecteurs $X_1, \dots, X_p$ formant la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \ M_{g\circ f} X_i = N X_i$$

ce qui signifie que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de $M_{g\circ f}$ est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de N, et prouve donc que :

$$M_{g\circ f} = N$$

□

Remarques

a. Le plus souvent dans les sujets de concours, on se situe dans le cas où $E = F = G$ (et f et g sont donc des endomorphismes de E), ce qui simplifie beaucoup les notations.

b. En particulier, on en déduit de manière immédiate le résultat suivant :

Proposition 10.21

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ une base de E, f et g deux endomorphismes de E, de matrices représentatives respectives M_f et M_g dans la même base $\mathcal{B}$.
f et g commutent si et seulement si M_f et M_g commutent ; autrement dit :

$$f \circ g = g \circ f \iff M_f M_g = M_g M_f$$

Théorème 10.22

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, f une application linéaire de E dans F et M la matrice représentative de f relativement à deux bases quelconques de E et F. On a :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$$

Preuve Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Comme f est une application linéaire de E dans F, la famille $(f(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant p}$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \\ &= \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \end{aligned}$$

De plus, par définition de la matrice M associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, les colonnes respectives de M sont les colonnes des coordonnées des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ dans la base $\mathcal{C}$, donc M est la matrice de la famille de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$ et donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$$

□

Proposition 10.23

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, f une application linéaire de E dans F.
f est bijective si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et, dans ce cas :

$$[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$$

Exercice 10.10 Démontrer la proposition 10.23.

Remarques

a. Si E et F sont des espaces vectoriels de même dimension finie non nulle et si f est une application linéaire de E dans F, on peut donc prouver que f est un isomorphisme en prouvant l'inversibilité de l'une de ses matrices représentatives.

b. Réciproquement, si M est une matrice carrée et si f est une application linéaire de E dans F dont la matrice associée dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est M, on peut montrer que M est inversible et déterminer son inverse M^{-1} en montrant que f est bijective et en déterminant sa réciproque f^{-1} puis en écrivant sa matrice relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

C.3. Matrices de passage

Définition 10.24

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.
La matrice de l'application identité Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Remarque En pratique, pour obtenir la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, il suffit de chercher les coordonnées des vecteurs $e'_1, \ldots, e'_n$ dans la base $\mathcal{B}$ puis d'écrire, en colonne et dans cet ordre, les coefficients de $e'_1, \ldots, e'_n$ dans $\mathcal{B}$.

Exemples 10.3

a. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice identité.

b. Si $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ (donc $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et si $\mathcal{B}' = ((1,2,0),(2,1,0),(-1,1,-1))$ (on laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$), alors :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Avec les notations précédentes, pour trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, on peut noter $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ puis exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3. Pour cela on remarque que :

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = e'_1 \\ 2e_1 + e_2 = e'_2 \\ -e_1 + e_2 - e_3 = e'_3 \end{cases}$$

donc, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = e'_1 \\ -3e_2 = -2e'_1 + e'_2 \\ -e_1 + e_2 - e_3 = e'_3 \end{cases}$$

et alors, par substitution (dans la première puis la dernière ligne) :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{3}\, e'_1 + \frac{2}{3}\, e'_2 \\ e_2 = \frac{2}{3}\, e'_1 - \frac{1}{3}\, e'_2 \\ e_3 = e'_1 - e'_2 - e'_3 \end{cases}$$

On en déduit la matrice $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en écrivant en colonne et dans cet ordre les coefficients dans $\mathcal{B}'$ de e_1, e_2, e_3 :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

C.4. Dimensions de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Proposition 10.25

Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors on a :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

En particulier, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors :

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = [\dim(E)]^2$$

Preuve On suppose que E et F sont de dimensions finies, respectivement p et n.
Si $p = 0$ ou $n = 0$, $\mathcal{L}(E, F)$ ne contient que l'application nulle, et est donc de dimension $0 = np$.
Supposons maintenant que p et n soient tous deux non nuls. D'après 10.18, $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont isomorphes, donc :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$$

d'où :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$$

□

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 10-1

Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Soit λ un réel. On a :

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$$

donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), 0, 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x + 2y) + (x' + 2y'), 0, \lambda(2x + 4y) + (2x' + 4y')) \\ &= \lambda(x + 2y, 0, 2x + 4y) + (x' + 2y', 0, 2x' + 4y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

Correction de l'exercice 10-2

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, MX est bien défini et appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puisque M appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, donc f est une application de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
De plus on a, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= M(\lambda X + Y) \\ &= \lambda MX + MY \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Correction de l'exercice 10-3

Supposons que f soit un isomorphisme de E sur F. Alors f^{-1} est une application de F dans E.
Soit alors $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f est bijective de E sur F, il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :

$$x = f(u) \quad \text{et} \quad y = f(v)$$

et on a alors, par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + y) &= f^{-1}(\lambda f(u) + f(v)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda u + v)) \\ &= \lambda u + v \\ &= \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{aligned}$$

donc f^{-1} est linéaire de F dans E : c'est un isomorphisme de F dans E.

Correction de l'exercice 10-4

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition :

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -2y \\ &\iff u = (-2y, y) \\ &\iff u = y\,(-2,1) \end{aligned}$$

  donc :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((-2,1))$$

- On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x+2y, 0, 2x+4y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x\,(1,0,2) + y\,(2,0,4),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,2),(2,0,4)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,2)) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10-5

i. $\operatorname{Ker}(f)$ est inclus dans E par définition et n'est pas vide car il contient 0_E d'après 10.2. Par ailleurs, comme f est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in (\operatorname{Ker}(f))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) &= \lambda f(x) + f(y) \\ &= \lambda 0_F + 0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall (x,y) \in (\operatorname{Ker}(f))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in \operatorname{Ker}(f)$$

ce qui permet de conclure que $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

ii. Par définition $\operatorname{Im}(f)$ est inclus dans F et n'est pas vide car 0_F appartient à $\operatorname{Im}(f)$ d'après 10.2. Soit alors $(x,y) \in (\operatorname{Im}(f))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe donc $(u,v) \in E^2$ tel que :

$$x = f(u) \quad \text{et} \quad y = f(v)$$

et on a alors, comme f est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= f(\lambda u + v) \end{aligned}$$

donc $\lambda x + y$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Correction de l'exercice 10-6

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille génératrice de E. Notons déjà que $f(x_1), \dots, f(x_n)$ appartiennent à $\operatorname{Im}(f)$ par définition donc, comme $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F :

$$\operatorname{Vect}((f(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}) \subset \operatorname{Im}(f)$$

Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, comme $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

et alors, par linéarité de f :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

donc y appartient à $\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ et :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}((f(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n})$$

ce qui prouve l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

Correction de l'exercice 10-7

i. ◇ Supposons que f soit injective. On a alors, comme f est linéaire :

$$f(x) = 0_F \iff f(x) = f(0_E)$$

donc, comme f est injective :

$$f(x) = 0_F \iff x = 0_E$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

◇ Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x) - f(y) = 0_F$$

donc, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x - y) = 0_F \\ &\Longrightarrow x - y \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\Longrightarrow x - y = 0_E \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est injective.

ii. f est une application de E dans F donc elle est surjective si et seulement si $f(E) = F$, donc si et seulement si : $\mathrm{Im}(f) = F$.

Correction de l'exercice 10-8

1. ◇ Supposons que f soit injective et considérons des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Par linéarité de f, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 &\iff f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

donc, d'après 10.14 :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$$

donc, comme la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre (c'est une base de E) :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

ce qui prouve que la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre dans F.

◇ Réciproquement, supposons que la famille $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ soit libre dans F et considérons un élément x de E. Comme $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$$

et alors, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} x\in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x)=0\\ &\iff \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)=0\end{aligned}$$

d'où, comme la famille $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ est libre :

$$\begin{aligned} x\in \operatorname{Ker}(f) &\iff \lambda_1=\dots=\lambda_n=0\\ &\iff x=0\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$ et donc que f est injective.

2. Comme $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E, on sait que :

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(f(x_1),\dots,f(x_n))$$

donc :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F &\iff \operatorname{Im}(f)=F\\ &\iff F=\operatorname{Vect}(f(x_1),\dots,f(x_n))\\ &\iff (f(x_1),\dots,f(x_n)) \text{ est génératrice de } F\end{aligned}$$

3. Il suffit de combiner les résultats des deux questions précédentes, f étant bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Correction de l'exercice 10-9

- Par définition, φ est une application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit alors (f,g) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On note :

$$\varphi(f)=M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}\quad\text{et}\quad \varphi(g)=N=(n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

On a donc :

$$\forall j\in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j)=\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}\varepsilon_i\quad\text{et}\quad g(e_j)=\sum_{i=1}^{n}n_{i,j}\varepsilon_i$$

d'où :

$$\forall j\in [\![1,p]\!]\,,\ (\lambda f+g)(e_j)=\lambda f(e_j)+g(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda m_{i,j}+n_{i,j}\right)\varepsilon_i$$

On en déduit :

$$\varphi(\lambda f+g)=(\lambda m_{i,j}+n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}=\lambda M+N$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(\lambda f+g)=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$$

ce qui prouve que φ est linéaire.

- Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $x\in E$. Comme $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que :

$$x=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e_j$$

et alors, comme f est linéaire :

$$f(x)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f(e_j)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(f) = 0 \\ &\iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = 0 \\ &\iff \forall x \in E,\ f(x) = 0 \\ &\iff f = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \end{aligned}$$

et comme $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ appartient à $\operatorname{Ker}(\varphi)$:

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathcal{L}(E,F)}\}$$

ce qui prouve que φ est injective.

- Enfin, pour tout $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, si on considère l'application linéaire f de E dans F définie par :

$$\forall x \in E \ / \ x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_j m_{i,j} \varepsilon_j$$

alors on a en particulier :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \varepsilon_j$$

donc $\varphi(f) = M$, ce qui prouve que φ est surjective.

- Finalement φ est linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, injective et surjective, donc bijective et c'est ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Correction de l'exercice 10-10

On note n la dimension commune de E et F.

- Supposons que f soit bijective de E sur F. On a alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = I_n$$

donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et :

$$[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$$

- Réciproquement, supposons que $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et notons g l'application linéaire de F dans E dont la matrice relative aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est $[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1}$. On a alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = [\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = I_n$$

donc :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

ce qui prouve que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

Sommaire