10 Espaces vectoriels

ECG Maths Appliquées
Semestre 3

Nous avons vu dans le chapitre 6 que l'ensemble des solutions d'un système homogène $\mathscr{S}$ a des propriétés remarquables de stabilité par combinaison linéaire (si (x, y) est un couple de solutions du système homogène $\mathscr{S}$ et si λ est un réel quelconque, alors $\lambda x + y$ est encore solution de $\mathscr{S}$).
Ces propriétés remarquables, que l'on rencontre dans un grand nombre d'ensembles (ensembles des suites réelles, ensemble des polynômes, ensemble des matrices carrées d'ordre n,...) nous amènent à étudier, dans un cadre plus général, les ensembles stables par combinaison linéaire.
Par analogie avec le plan ou l'espace étudiés au collège et au lycée en géométrie plane et dans l'espace, qui sont eux-mêmes stables par combinaison linéaire et dont les éléments sont appelés *vecteurs*, un tel ensemble sera appelé espace vectoriel.

A. Exemples introductifs

A.1. L'ensemble $\mathbb{R}^n$

Par analogie avec les opérations usuelles de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les opérations suivantes :

i. **L'addition**, notée $+$, que l'on définit par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \ / \ x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},\ y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},\ x + y = (x_i + y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Ainsi, l'addition de deux éléments de $\mathbb{R}^n$ se fait en effectuant l'addition composante par composante.

ii. **La multiplication par un scalaire**, notée $\cdot$, que l'on définit par :

$$\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x = (\lambda x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Ainsi, la multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire λ se fait en multipliant chaque composante de x par λ.

On vérifie alors que ces deux opérations ont les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ x + y = y + x,$
- $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ (x + y) + z = x + (y + z),$
- $\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + (0)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},$
- $\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + (-x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n},$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x),$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 1 \cdot x = x.$

On dira que les opérations $+$ et $\cdot$ confère à $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A.2. L'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$

Dans cette sous-partie, I désigne une partie de $\mathbb{R}$ et l'on note $E = \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. Sur cet ensemble, on définit les opérations suivantes :

i. **L'addition**, notée $+$, que l'on définit par :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \forall x \in I,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ii. **La multiplication par un scalaire**, notée $\cdot$, que l'on définit par :

$$\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

On vérifie alors que ces deux opérations ont les propriétés suivantes (0_E désignant l'application constante nulle sur E) :

- $\forall (f,g) \in E^2,\ f+g = g+f,$
- $\forall (f,g,h) \in E^3,\ (f+g)+h = f+(g+h),$
- $\forall f \in E,\ f + 0_E = f,$
- $\forall f \in E,\ f + (-f) = 0_E,$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in E^2,\ \lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g,$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall f \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f,$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall f \in E,\ (\lambda\mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f),$
- $\forall f \in E,\ 1 \cdot f = f.$

À nouveau, on dira que les opérations $+$ et $\cdot$ confère à E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Nous allons maintenant généraliser ces propriétés à d'autres ensembles pour pouvoir étudier la construction de leurs éléments.

B. Espaces vectoriels

B.1. Structure d'ensemble

Définition 10.1

On appelle **espace vectoriel** tout triplet $(E,+,\cdot)$ ayant les propriétés suivantes :

i. E est un ensemble non vide,

ii. $+$ est une loi de composition interne sur E, appelée **addition interne**, ayant les propriétés suivantes :

- $\forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$ (l'addition est dite commutative),
- $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (l'addition est dite associative),
- $\exists\, 0_E \in E \ /\ \forall x \in E,\ x + 0_E = x$ (0_E est appelé élément neutre de E),
- $\forall x \in E,\ \exists\, y_x \in E \ /\ x + y_x = 0_E$ (un tel élément y_x est appelé symétrique de x pour l'addition et en général noté $-x$).

iii. $\cdot$ est une loi de composition externe sur E, appelée **multiplication externe**, ayant les propriétés suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x),$
- $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$

Remarques

a. On verra plus loin qu'en pratique cette définition n'est jamais utilisée aux concours.

b. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, le produit $\lambda \cdot x$ sera plus simplement noté λx.

c. Pour plus de simplicité, si x et y désignent deux vecteurs de E, le vecteur $x + (-y)$ sera plus simplement noté $x - y$.

d. Dans la pratique, les opérations $+$ et $\cdot$ ainsi que l'ensemble $\mathbb{R}$ sont connus sans ambiguïté et on convient donc de parler de l'espace vectoriel E pour le triplet $(E,+,\cdot)$.

e. Comme il n'y a en général pas de doute quant au type de vecteurs considérés, le vecteur 0_E est souvent noté 0 pour plus de simplicité.

f. Retenir qu'un espace vectoriel n'est jamais vide !

Proposition 10.2

Dans cette proposition, n et p désignent deux entiers naturels et les lois $+$ et $\cdot$ sont supposées être les lois usuelles sur les ensembles considérés.

i. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (si $n \geqslant 1$) est un espace vectoriel, dont l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^n}$ pour la loi $+$ est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles.

ii. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel, dont l'élément neutre pour la loi $+$ est la matrice nulle.

iii. En notant $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ est un espace vectoriel, dont l'élément neutre pour la loi $+$ est le polynôme nul.

B.2. Règles de calcul dans un espace vectoriel

Proposition 10.3

Soit E un espace vectoriel, (x, y) un couple d'éléments de E et λ un scalaire.

i. $\lambda x = 0 \iff \lambda = 0$ ou $x = 0$.

ii. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda x)$.

Proposition 10.4

Soit E un espace vectoriel On a :

$$\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n,\ \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in E$$

C. Sous-espaces vectoriels

C.1. Définition et caractérisation des sous-espaces vectoriels

Définition 10.5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle **sous-espace vectoriel** de E tout sous-ensemble F de E ayant les propriétés suivantes :

i. F n'est pas vide,

ii. F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$

iii. F est stable par $\cdot$: $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in F$

Proposition 10.6

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

Preuve Soit F une partie de E.

◇ Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Par définition, F n'est pas vide et vérifie :

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in F^2,\ u + v \in F & (1) \\ \forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u \in F & (2) \end{cases}$$

Comme F n'est pas vide, il contient au moins un vecteur x et alors, en considérant (2) avec $\lambda = 0$ et comme $0 \cdot x = 0_E$:

$$0_E \in F$$

De plus, pour tout $(x, y) \in F^2$, λx appartient à F d'après (2) et donc, d'après (1) :

$$\lambda x + y \in F$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

Comme 0_E appartient à F, F n'est pas vide. De plus, en prenant $\lambda = 1$ et comme, pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$, on a :

$$\forall (x,y) \in F^2,\ x + y \in F$$

Par ailleurs, en prenant $y = 0_E$ et comme, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\lambda x + 0_E = \lambda x$, on a :

$$\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in F$$

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarques

a. Si E est un espace vectoriel, pour démontrer qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E, on pourra toujours utiliser la proposition 10.6.

b. Si E est un espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel de E contient le vecteur nul 0_E.

c. Attention à ne négliger aucun point de cette proposition et notamment à ne pas oublier de préciser que F est inclus dans E (ce qui est en général évident) et contient le vecteur nul 0_E.

Exercice 10.1 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax + by + cz = 0\right\}$$

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 10.7

Soit E un espace vectoriel. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 10.8

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.

i. La restriction de $+$ (respectivement de $\cdot$) à F est une loi de composition interne (resp. externe) sur F.

ii. Muni des ces lois, F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque Il s'agit d'un résultat essentiel. En pratique, pour prouver qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on cherchera donc un espace vectoriel E contenant F (en général E sera un des espaces vectoriels de référence mentionnés dans la proposition 10.2) et l'on prouvera que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant la proposition 10.6.

C.2. Le cas de l'ensemble des solutions d'un système homogène

Proposition 10.9

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

i. L'ensemble $\left\{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ / \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

ii. En considérant le système homogène

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,j}x_j + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i,1}x_1 + \cdots + \alpha_{i,j}x_j + \cdots + \alpha_{i,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{p,1}x_1 + \cdots + \alpha_{p,j}x_j + \cdots + \alpha_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10.2 Démontrer la proposition 10.9.

C.3. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 10.10

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'éléments de E. On appelle :

i. **combinaison linéaire** de $x_1, \ldots, x_n$ tout vecteur x s'écrivant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, où $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$,

ii. **sous-espace vectoriel de E engendré** par $\mathcal{F}$ et on note $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Remarques

a. D'après 10.4, si E est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire d'éléments de E appartient encore à E. On dit que E est stable par combinaison linéaire.

b. Il découle de manière immédiate de la définition que, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E et si F est un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$, alors : $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset F$.

Proposition 10.11

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'éléments de E. On a :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Preuve On note :

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Par définition, $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$ donc $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ contient toute combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ donc :

$$G \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$$

Comme $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$, il suffit alors pour conclure d'établir que G est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, si l'on considère la famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de scalaires tous nuls sauf $\lambda_{j,j}$, égal à 1, on peut remarquer que :

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} x_i$$

donc $x_1, \dots, x_n$ appartiennent tous à G. Soient alors (x, y) un couple d'éléments de G et λ un scalaire. Par définition, il existe deux familles $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de scalaires telles que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

et alors :

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i)\, x_i \end{aligned}$$

et donc :

$$\lambda x + y \in G$$

Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ donc :

$$G \subset \mathcal{F}$$

et finalement :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = G$$

□

Proposition 10.12

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

i. Si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

ii. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires tous non nuls, alors :

$$\mathrm{Vect}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

iii. Si u est combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \dots, x_n$, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1 + u, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Exemples 10.1 **a.** Si $E = \mathbb{R}^2$, comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ et $(1,0) = (1,1) - (0,1)$, on a :

$$\mathrm{Vect}((1,0),(0,1),(1,1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathrm{Vect}((1,1),(0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(1,1))$$

b. De même, comme $(2,1) = 2 \cdot (1,0) + (0,1)$ et $(0,1) = (2,1) - 2 \cdot (1,0)$, on a :

$$\mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1),(2,1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(2,1))$$

Remarque Cette proposition, très importante, servira de point de départ à un grand nombre de raisonnements d'algèbre. Elle devra donc être parfaitement comprise avant d'envisager de travailler les paragraphes suivants.

D. Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel non nul. et E est un espace vectoriel
On a vu que l'étude des espaces vectoriels avait pour but d'étudier certaines propriétés d'ensembles ayant des caractéristiques proches du plan ou de l'espace étudiés en géométrie affine.
Or, dans le cas du plan (respectivement de l'espace), il a été vu dans les classes antérieures qu'il était possible de caractériser tous les vecteurs à partir de la seule connaissance de deux (respectivement trois) vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (respectivement $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$).

Nous allons donc étudier dans quelle mesure il est possible d'étendre cette propriété à un espace vectoriel quelconque. Plus précisément, nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

1. Est-il possible de trouver une famille finie de vecteurs en fonction desquels tous les vecteurs de E peuvent s'exprimer ? Une telle famille, lorsqu'elle existe, sera appelée famille génératrice de E.
2. Si de telles familles existent, est-il possible de limiter le nombre de leurs vecteurs (leur longueur) afin de simplifier l'étude et, si possible, que chaque vecteur de E ne puisse s'exprimer que d'une seule façon en fonction des vecteurs de cette famille ? Une telle famille, lorsqu'elle existe, sera appelée base de E. C'est le cas par exemple, dans le plan, de tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

D.1. Familles génératrices

Définition 10.13

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E, ou que E est engendré par la famille $\mathcal{F}$ si :

$$\forall x \in E,\ \exists\, (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ /\ x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

c'est-à-dire si : $E = \mathrm{Vect}(F)$.

Exercice 10.3 On considère les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x - 1, \quad P_2(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_3(x) = x^2$$

Prouver que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.

D.2. Familles libres, familles liées

Définition 10.14

Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

i. On dit que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est **libre**, ou que les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants si elle vérifie :

$$\forall (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i = 0 \right)$$

ii. On dit que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est **liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si :

$$\exists\, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ /\ (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \neq 0_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Exercice 10.4

1. Soit (x, y) une famille de deux vecteurs. Prouver que la famille (x, y) est liée si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que : $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
2. Soit $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[x]$. On suppose que $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Remarques

a. Dire que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre revient donc à dire que la seule combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ nulle est celle dont tous les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont nuls.

b. Retenir les exemples étudiés dans l'exercice 10.4 : quoique n'étant pas précisés dans le programme, l'utilisation de ces résultats est fréquente au concours.

c. Ainsi, une famille de **deux** vecteurs est libre si et seulement si ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Attention, cela n'est plus vrai pour une famille d'au moins trois vecteurs.

d. On déduit de manière immédiate de la définition le résultat suivant :

Proposition 10.15

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors pour toutes familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de scalaires :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ a_i = b_i$$

Proposition 10.16

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

i. Si $\mathcal{F}$ contient le vecteur nul, alors la famille $\mathcal{F}$ est liée.

ii. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors tous ses vecteurs sont non nuls.

iii. $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

iv. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

v. Si $\mathcal{F}$ est libre et si $\mathcal{G}$ est une famille composée de vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{G}$ est libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

vi. Si $\mathcal{F}$ est liée et si $\mathcal{H}$ est une famille de vecteurs de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{H}$ est liée. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Exercice 10.5 Démontrer la proposition 10.16.

Remarques

a. Attention au point *iii* de cette proposition : une famille peut être liée alors qu'aucun vecteur n'est proportionnel à un autre. Par exemple, la famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ est liée puisque le troisième vecteur est égal à la somme des deux premiers.

b. Par ailleurs, lorsqu'une famille est liée, l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres, mais un vecteur quelconque n'est pas nécessairement combinaison linéaire des autres.

D.3. Bases

Définition 10.17

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice de E.

Proposition 10.18

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists!\, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ /\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Dans ce cas, pour un vecteur x de E s'écrivant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, la famille $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelée famille des composantes (ou des coordonnées) de x dans la base $\mathcal{F}$.

Remarques

a. Attention, si E admet une base, il en admet une infinité. Il faut donc éviter de parler de *la* base de E, mais bien de parler *d'une* base de E.

b. La connaissance d'une base de E permet donc de décrire tous les éléments de E.

Preuve

◇ Supposons que $\mathcal{F}$ soit une base de E. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Soit alors $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ une famille de scalaires telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\, x_i = 0$$

et comme la famille $\mathcal{F}$ est libre :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \alpha_i - \beta_i = 0$$

et finalement :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \alpha_i = \beta_i$$

et donc :

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n\ /\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n\ /\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Alors tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E. Soit alors $(\alpha)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i$$

et donc d'après l'hypothèse de départ :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \alpha_i = 0$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Finalement, $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de $\mathcal{F}$, donc c'est une base de $\mathcal{F}$.

□

D.4. Bases des espaces vectoriels de référence

Théorème 10.19

Soit n un entier naturel non nul. On note :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 10.20

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $e_0, e_1, \dots, e_n$ les polynômes définis par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = x^k$$

La famille $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}_n[x]$.

Théorème 10.21

Soit (n, p) un couple d'entiers naturels non nuls. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne, égal à 1.
La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque Ces résultats s'obtiennent de manière immédiate avec la proposition 10.18.

E. Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute cette section, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

E.1. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 10.22

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il ne contient que le vecteur nul ou s'il admet une famille génératrice contenant un nombre fini de vecteurs.
Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemples 10.2

a. D'après les résultats du paragraphe D.4, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

b. $E = \{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 10.23

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie, différent de $\{0\}$. Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de vecteurs de E et si $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille génératrice de E, alors : $n \leqslant p$.

Théorème 10.24 ▶ Théorème de la dimension

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie, différent de $\{0\}$.

i. E admet une base.

ii. Toutes les bases de E ont la même longueur, appelée **dimension** de E et notée $\dim(E)$.

Par convention, on note : $\dim(\{0\}) = 0$.

Théorème 10.25

i. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

iii. $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$.

Remarque Ces résultats découlent de manière immédiate des résultats du paragraphe D.4.

E.2. Lien entre familles libres, familles génératrices et bases

Dans toute cette partie, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Proposition 10.26

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de p vecteurs de E.

i. Si la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre, alors : $p \leqslant n$,

ii. Si la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est génératrice de E, alors : $p \geqslant n$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la proposition 10.23.

b. En conséquence de cette proposition, si E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n, toute famille comportant au moins $n + 1$ vecteurs de E est nécessairement liée et toute famille contenant au plus $n - 1$ vecteurs de E ne peut être génératrice de E.

Proposition 10.27

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E,

ii. la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre,

iii. la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de E.

Remarque Bien retenir ce résultat, fondamental. En particulier, pour démontrer qu'une famille est une base de E, on démontrera le plus souvent qu'elle est libre et comporte autant de vecteurs de E que la dimension de E. En effet, il est en général plus simple de prouver qu'une famille est libre que de prouver qu'elle est génératrice de E.

Théorème 10.28 ▶ Théorème de la base incomplète

On suppose que : $1 \leqslant p < n$. Si E est un espace vectoriel de dimension n et si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il existe $n - p$ vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$ de E tels que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E.

E.3. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Proposition 10.29

Si E est un espace vectoriel de dimension n et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

i. F est de dimension finie et : $\dim(F) \leqslant n$,

ii. si $\dim(F) = \dim(E)$, alors : $F = E$.

Remarque Bien retenir cette proposition, et en particulier le deuxième point, qui sera la plus souvent utilisé pour démontrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

E.4. Sous-espaces vectoriels remarquables

Définition 10.30

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n. On appelle :

i. **droite vectorielle** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1,

ii. **plan vectoriel** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2,

iii. **hyperplan vectoriel** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Proposition 10.31

Soient E un espace vectoriel et D une droite vectorielle de E. Pour tout vecteur x **non nul** de D, (x) est une base de D, autrement dit :

$$\forall x \in D \setminus \{0\},\ D = \mathrm{Vect}(x)$$

Exercice 10.6 Démontrer la proposition 10.31.

E.5. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice

Définition 10.32

Si E est un espace vectoriel et si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, on appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

Définition 10.33

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En notant $C_1, \ldots, C_p$ les vecteurs colonnes de M, le rang de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ est aussi appelé rang de M, et noté $\mathrm{rg}(M)$.

Proposition 10.34

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a ;:

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$$

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 10-1

F est inclus dans $\mathbb{R}^3$ par définition. De plus, on a :

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

donc $(0,0,0)$ appartient à F (qui n'est donc pas vide). Soient alors (u,v) un couple d'éléments de F et λ un réel. En notant $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$ et $w = \lambda u + v$, on a :

$$w = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

et :

$$a\,(\lambda x + x') + b\,(\lambda y + y') + c\,(\lambda z + z') = \lambda\,(ax + by + cz) + (ax' + by' + cz')$$

et donc, comme u et v appartiennent à F :

$$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$$

donc $w \in F$ et :

$$\forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u + v \in F$$

Correction de l'exercice 10-2

1. On note :

$$F = \left\{ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

Par définition, F est une partie de $\mathbb{R}^n$. De plus F contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ (donc F n'est pas vide). Soient alors $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. En notant $w = \lambda x + y$, on a : $w = (\lambda x_i + y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

et donc, comme x et y appartiennent à F :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda x_i + y_i) = 0$$

donc $w \in F$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

ce qui nous permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Se démontre comme le point précédent.

Correction de l'exercice 10-3

Les vecteurs P_0, P_1, P_2 et P_3 appartiennent tous à $\mathbb{R}_2[x]$ donc :

$$\mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}_2[x]$$

Soit alors P un élément de $\mathbb{R}_2[x]$. Il existe trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a + bx + cx^2$$

et alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a - b + b(x-1) + 0(x+1) + cx^2$$

d'où :

$$P = \frac{a-b}{2} P_0 + bP_1 + 0P_2 + cP_3$$

donc :

$$P \in \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

d'où :

$$\mathbb{R}_2[x] \subset \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

ce qui prouve que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction de l'exercice 10-4

1. ◇ Supposons qu'il existe un scalaire λ tel que : $x = \lambda y$ (le cas où $y = \lambda x$ se traite de manière analogue). On a alors :

$$1 \cdot x + (-\lambda) y = 0$$

donc, comme $(1, -\lambda) \neq (0,0)$, la famille (x,y) est liée.

◇ Supposons que la famille (x, y) soit liée. Il existe alors un couple $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que :

$$ax + by = 0$$

Si $a \neq 0$, alors on a :

$$x = -\frac{b}{a}\, y$$

et si $b \neq 0$, alors on a :

$$y = -\frac{a}{b}\, x$$

donc dans tous les cas, il existe un scalaire λ tel que :

$$x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note d_k le degré de P_k et on suppose, pour simplifier la rédaction (heureusement sans affecter la preuve) :

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_n$$

Soit alors $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = 0 \tag{10.1}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(k)$: « $a_k = 0$ » est vraie.

◇ On rappelle qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Or les polynômes $P_1, \ldots, P_{n-1}$ sont tous de degré strictement inférieur à d_n, donc le monôme de degré d_n de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P_i$ est $a_n \alpha_n X^{d_n}$, où α_n est le coefficient dominant de P_n. On a donc :

$$a_n \alpha_n = 0$$

et donc, comme $\alpha_n \neq 0$ (α_n est le coefficient dominant de P_n, qui n'est pas le polynôme nul) :

$$a_n = 0$$

donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

◇ Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Supposons que $\mathscr{P}(k), \mathscr{P}(k+1), \ldots \mathscr{P}(n)$ soient vraies. On a alors, d'après (10.1) :

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i P_i = 0$$

Or, de même que précédemment, on peut remarquer que le monôme de degré d_{k-1} de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} a_i P_i$ est $a_{k-1}\alpha_{k-1} X^{d_{k-1}}$ où α_{k-1} est le coefficient dominant de P_{k-1} et donc, comme un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$a_{k-1}\alpha_{k-1} = 0$$

et donc, comme $\alpha_{k-1} \neq 0$:

$$a_{k-1} = 0$$

Ainsi, si $\mathscr{P}(k), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(k-1)$ l'est également.

◇ Ainsi, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ a_k = 0$$

Soit $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[x]$. On suppose que $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Correction de l'exercice 10-5

On note $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$.

1. Supposons que $\mathcal{F}$ contienne le vecteur nul. Si $x_1 = 0_E$, alors en notant $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \neq 0$$

donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.

2. Par contraposition, le point précédent nous permet d'affirmer que, si la famille $\mathcal{F}$ est libre, aucun de ses vecteurs n'est nul.

3. Supposons que $\mathcal{F}$ soit liée. Alors il existe une famille $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de scalaires non tous nuls telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$$

Il existe alors $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\alpha_i \neq 0$ et alors :

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} x_k$$

donc x_i est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $i \in [\![2, n]\!]$ tel que x_i soit combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$. Il existe alors une famille $(\alpha_k)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}}$ de scalaires telle que :

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k x_k$$

et alors, en notant $\alpha_i = -1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \neq 0$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

4. Ce point s'obtient par contraposition du point précédent.

5. Supposons que $\mathcal{F}$ soit libre et considérons une sous-famille $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Quitte à permuter les vecteurs de $\mathcal{F}$, on peut supposer que $\mathcal{G} = (x_1, \ldots, x_p)$ où $1 \leqslant p < n$. Soit alors $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = 0$$

En notant $\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$$

et donc, comme la famille $\mathcal{F}$ est libre :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha_k = 0$$

et en particulier :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \alpha_k = 0$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{G}$ est libre.

6. Ce point s'obtient par contraposition du point précédent.

Correction de l'exercice 10-6

Soit x un vecteur non nul de D. Comme D est un espace vectoriel, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in D$$

d'où :

$$\mathrm{Vect}(x) \subset D$$

D'autre part, comme x n'est pas nul, $\mathrm{Vect}(x)$ est de dimension 1, donc :

$$\dim(D) = \dim(\mathrm{Vect}(x))$$

et donc, d'après 10.29 :

$$D = \mathrm{Vect}(x)$$

Sommaire