10 Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

Dans tout ce chapitre, n, m et p désignent des entiers naturels non nuls.

A. Généralités

A.1. Définition

Définition 10.1

On dit qu'une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire si elle vérifie :

1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in (\mathbb{R}^n),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemples 10.1

a. L'application $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\mathrm{Id}(x) = x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, appelée **identité** de $\mathbb{R}^n$.

b. Plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, souvent appelée homothétie vectorielle.

A.2. Propriétés

Proposition 10.2

Si $\mathbb{R}^m$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors :

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = -f(x)$$

Remarques

a. Il s'agit de résultats importants, à bien retenir.

b. Ces résultats sont des conséquences immédiates de la définition (avec $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$) et des propriétés fondamentales des calculs dans un espace vectoriel.

Proposition 10.3

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

i. f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

ii. Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque

En pratique, pour démontrer qu'une application est linéaire, on utilisera le plus souvent le premier point de cette proposition, et non la définition.

Preuve *i.* ◇ Supposons que f soit linéaire. On a alors :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v) \tag{10.1}$$

et :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \tag{10.2}$$

En utilisant (10.1), on obtient :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$$

puis, en utilisant (10.2) :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \tag{10.3}$$

En prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et par ailleurs, en prenant $y = 0_E$ dans (10.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) &= f(\lambda x + 0_E) \\ &= \lambda f(x) + f(0_E) \\ &= \lambda f(x) + 0_F \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

ii. Se déduit du point i par récurrence.

□

Exercice 10.1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

Montrer que f est une application linéaire.

Proposition 10.4

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ (respectivement pour tout vecteur y, de $\mathbb{R}^m$), on convient de noter X (resp. Y) la colonne de ses coordonnées dans la base canonique. L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x)$ vérifie $Y = MX$, est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 10.2 Démontrer la proposition 10.4.

A.3. Opérations sur les applications linéaires

Proposition 10.5

i. Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

ii. Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et λ un réel, alors $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

iii. Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et si g est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$, alors $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 10.6

On dit que deux endomorphismes $\mathbb{R}^m$ et g de $\mathbb{R}^n$ commutent si : $f \circ g = g \circ f$.

Proposition 10.7

Soient f, g et h des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h \quad \text{et} \quad f \circ (g+h) = f \circ g + g \circ h$$

Remarque Ces deux résultats se démontrent de manière immédiate, le premier à l'aide de la définition de la composition et de la somme de deux applications (linéaires ou non), la seconde à l'aide de la définition de la composition et de la linéarité de $\mathbb{R}^m$.

B. Noyau et image d'une application linéaire

B.1. Noyau d'une application linéaire

Définition 10.8

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On appelle noyau de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$$

Remarque D'après la proposition 10.2, le noyau d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
Lorsque $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on dit que le noyau de f est « réduit au vecteur nul ».

Proposition 10.9

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10.3 Démontrer la proposition 10.9.

B.2. Image d'une application linéaire

Définition 10.10

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On appelle image de f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x), \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

Remarque Bien retenir que, si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{Ker}(f)$ est formé d'éléments de $\mathbb{R}^n$, tandis que $\mathrm{Im}(f)$ est formé d'éléments de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 10.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

On a vu que f est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Proposition 10.11

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 10.5 Démontrer la proposition 10.11.

Proposition 10.12

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n})$$

Exercice 10.6 Démontrer la proposition 10.12.

B.3. Théorème du rang

Théorème 10.13 ▶ Théorème du rang

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

L'entier $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est alors appelé rang de f et noté $\mathrm{rg}(f)$.

C. Noyau et rang d'une matrice

D. Noyau d'une matrice

Définition 10.14

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de l'équation $MX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est appelé noyau de M et noté $\mathrm{Ker}(M)$:

$$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0\}$$

Théorème 10.15

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$.

E. Rang d'une matrice

Définition 10.16

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En notant $C_1, \ldots, C_p$ les vecteurs colonnes de M, le rang de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ est aussi appelé rang de M, et noté $\mathrm{rg}(M)$.

Proposition 10.17

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$$

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 10-1

Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Soit λ un réel. On a :

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$$

donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), 0, 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda (x + 2y) + (x' + 2y'), 0, \lambda (2x + 4y) + (2x' + 4y')) \\ &= \lambda (x + 2y, 0, 2x + 4y) + (x' + 2y', 0, 2x' + 4y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

Correction de l'exercice 10-2

Par définition f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit alors x et x' deux éléments de $\mathbb{R}^n$, dont les colonnes des coordonnées respectives dans la base canonique sont notées X et X'.
On a alors :

$$M(\lambda X + X') = \lambda M X + M X'$$

Or $M(\lambda X + X')$, MX et MX' sont les colonnes des coordonnées respectives de $f(\lambda x + x')$, $f(x)$ et $f(x')$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$ donc : donc :

$$f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$$

Ainsi $\mathbb{R}^m$ est linéaire.

Correction de l'exercice 10-3

$\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans $\mathbb{R}^n$ par définition et n'est pas vide car il contient $0_{\mathbb{R}^n}$ d'après 10.2. Par ailleurs, comme f est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathrm{Ker}(f))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) &= \lambda f(x) + f(y) \\ &= \lambda 0_{\mathbb{R}^m} + 0_{\mathbb{R}^m} \\ &= 0_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall (x, y) \in (\mathrm{Ker}(f))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$$

ce qui permet de conclure que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 10-4

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x, y) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -2y \\ &\iff u = (-2y, y) \\ &\iff u = y(-2, 1) \end{aligned}$$

  donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2, 1))$$

- On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x + 2y, 0, 2x + 4y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 2) + y(2, 0, 4),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (2, 0, 4)) \\ &= \mathrm{Vect}((1, 0, 2)) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10-5

Par définition $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathbb{R}^m$ et n'est pas vide car $0_{\mathbb{R}^m}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ d'après 10.2. Soit alors $(x, y) \in (\mathrm{Im}(f))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe donc $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que :

$$x = f(u) \quad \text{et} \quad y = f(v)$$

et on a alors, comme $\mathbb{R}^m$ est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= f(\lambda u + v) \end{aligned}$$

donc $\lambda x + y$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Correction de l'exercice 10-6

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Notons déjà que $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$ par définition donc, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{Vect}((f(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. De plus, comme $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

et alors, par linéarité de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

donc y appartient à $\mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ et :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}((f(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n})$$

ce qui prouve l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

Sommaire