8 Introduction aux espaces vectoriels

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Il s'agit ici de faire une introduction à la notion d'espaces vectoriels, qui sera étudiée en deuxième année et c'est pourquoi les résultats présentés ici seront admis ; la plupart seront démontrés dans le chapitre 10.
Dans tout le cours, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

A. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 8.1

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une opération $+$ appelée loi de composition interne et d'une opération $\cdot$ appelée loi de composition externe, que l'on définit de la façon suivante :

- Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$, on note $x + y$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

- Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ et λ est un réel, on note $\lambda \cdot x$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Remarques

a. Ne pas oublier que l'on a pas définit ici de multiplication interne ; par conséquent si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, le produit xy n'existe pas.

b. Dans la suite, on notera $0_{\mathbb{R}^n}$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles.

A.1. Propriétés

Proposition 8.2

Les opérations $+$ et $\cdot$ définies ci-dessus ont les propriétés suivantes :

i. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ x + y = y + x$ (l'addition est dite commutative),

ii. $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (l'addition est dite associative),

iii. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x + 0_{\mathbb{R}^n} = x$ ($0_{\mathbb{R}^n}$ est appelé élément neutre de $\mathbb{R}^n$),

iv. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists\, y_x \in \mathbb{R}^n\ /\ x + y_x = 0_{\mathbb{R}^n}$ (un tel élément y_x est appelé opposé de x pour l'addition et en général noté $-x$).

v. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

vi. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,

vii. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,

viii. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 1 \cdot x = x$.

Muni des opérations $+$ et $\cdot$, on dit que $\mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel** ; ses éléments sont appelés **vecteurs**.

Remarques

a. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, le produit $\lambda \cdot x$ sera plus simplement noté λx.

b. Pour plus de simplicité, si x et y désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $x+(-y)$ sera plus simplement noté $x-y$.

c. Comme il n'y a en général pas de doute quant au type de vecteurs considérés, le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$ est souvent noté 0 pour plus de simplicité.

Proposition 8.3

Soit (x, y) un couple d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et λ un réel.

i. $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.

ii. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda x)$.

A.2. Définitions

Définition 8.4

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison linéaire** de $e_1, \ldots, e_p$ tout vecteur x s'écrivant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$, où $a_1, \ldots, a_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ est noté $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$:

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Remarques

a. Pour toute famille $(e_1, \ldots, e_p)$, le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$; on a en effet :

$$0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot e_i$$

b. Pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on peut remarquer que :

$$x = x_1\,(1, 0, \ldots, 0) + x_2\,(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n\,(0, \ldots, 0, 1)$$

ce qui signifie que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \cdots, 0, 1)$. On peut de plus remarquer que, pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tous réels $x'_1, \ldots, x'_n$:

$$\begin{aligned} x = x'_1\,(1, 0, \ldots, 0) + x'_2\,(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x'_n\,(0, \ldots, 0, 1) &\Longleftrightarrow x = (x'_1, \ldots, x'_n) \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x'_i = x_i \end{aligned}$$

Définition 8.5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

- La famille $\mathcal{B}$ est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés coordonnées de x dans la base canonique et la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est appelée matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples 8.1

a. La famille $((1,0),(0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b. La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. La matrice $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est la colonne des coordonnées du vecteur $(1,-1,2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

B. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

B.1. Définition et caractérisation des sous-espaces vectoriels

Définition 8.6

On appelle **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$ tout sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes :

i. F n'est pas vide,

ii. F est stable par $+$: $\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$

iii. F est stable par $\cdot$: $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in F$

Proposition 8.7

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

i. $0_{\mathbb{R}^n} \in F$,

ii. $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

Remarques

a. Pour démontrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on pourra toujours utiliser la proposition 8.7.

b. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$.

c. Attention à ne négliger aucun point de cette proposition et notamment à ne pas oublier de préciser que F est inclus dans $\mathbb{R}^n$ (ce qui est en général évident) et contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$.

d. Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété *ii* est dit **stable par combinaison linéaire**.

Preuve

Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$.

◇ Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Par définition, F n'est pas vide et vérifie :

$$\begin{cases}\forall (u,v) \in F^2,\ u+v \in F & (1)\\ \forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u \in F & (2)\end{cases}$$

Comme F n'est pas vide, il contient au moins un vecteur x et alors, en considérant (2) avec $\lambda = 0$ et comme $0 \cdot x = 0_{\mathbb{R}^n}$:

$$0_{\mathbb{R}^n} \in F$$

De plus, pour tout $(x,y) \in F^2$, λx appartient à F d'après (2) et donc, d'après (1) :

$$\lambda x + y \in F$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$0_{\mathbb{R}^n} \in F \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

Comme $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à F, F n'est pas vide. De plus, en prenant $\lambda = 1$ et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \cdot x = x$, on a :

$$\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$$

Par ailleurs, en prenant $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ et comme, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x + 0_{\mathbb{R}^n} = \lambda x$, on a :

$$\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in F$$

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

□

Exercice 8.1 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax + by + cz = 0\}$$

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8.2 Prouver que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 3y - z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 8.8

$\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 8.9

Si $u_1, \ldots, u_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

B.2. Le cas de l'ensemble des solutions d'un système homogène

Proposition 8.10

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

i. L'ensemble $\left\{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

ii. En considérant le système homogène

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,j}x_j + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i,1}x_1 + \cdots + \alpha_{i,j}x_j + \cdots + \alpha_{i,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{p,1}x_1 + \cdots + \alpha_{p,j}x_j + \cdots + \alpha_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8.3 Démontrer la proposition 8.10.

B.3. Propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 8.11

Soient $\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

i. Si σ est une permutation de $[\![1, p]\!]$, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$$

ii. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des scalaires tous non nuls, alors :

$$\mathrm{Vect}(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_p x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$$

iii. Si x_1 est combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \ldots, x_p$, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_p)$$

iv. Si u est combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \ldots, x_p$, alors :

$$\text{Vect}(x_1 + u, \ldots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$$

Exemples 8.2 **a.** Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ et $(1,0) = (1,1) - (0,1)$, on a :

$$\text{Vect}((1,0),(0,1),(1,1)) = \text{Vect}((1,0),(0,1)) = \text{Vect}((1,1),(0,1)) = \text{Vect}((1,0),(1,1))$$

b. De même, comme $(2,1) = 2 \cdot (1,0) + (0,1)$ et $(0,1) = (2,1) - 2 \cdot (1,0)$, on a :

$$\text{Vect}((1,0),(0,1)) = \text{Vect}((1,0),(0,1),(2,1)) = \text{Vect}((1,0),(2,1))$$

Remarque Cette proposition, très importante, servira de point de départ à un grand nombre de raisonnements d'algèbre. Elle devra donc être parfaitement comprise avant d'envisager de travailler les paragraphes suivants.

C. Famille libre, famille génératrice, base

C.1. Familles génératrices

Définition 8.12

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de F, ou que F est engendré par la famille $\mathcal{F}$ si :

$$\forall x \in F,\ \exists\, (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p \ /\ x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

c'est-à-dire si : $F = \text{Vect}(F)$.

Exercice 8.4 On considère les vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (1,-1) \quad \text{et} \quad u_3 = (-1,2)$$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

C.2. Familles libres, familles liées

Définition 8.13

Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

i. On dit que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est **libre**, ou que les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants si elle vérifie :

$$\forall (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ \alpha_i = 0 \right)$$

ii. On dit que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est **liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si :

$$\exists\, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p \ /\ (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \neq 0_{\mathbb{R}^p} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$$

Exercice 8.5 Soit (x, y) une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Prouver que la famille (x, y) est liée si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que : $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Remarques

a. Dire que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre revient donc à dire que la seule combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ nulle est celle dont tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont nuls.

b. Retenir l'exemple étudié dans l'exercice 8.4 : quoique n'étant pas précisés dans le programme, l'utilisation de ce résultat est fréquente au concours.

c. Ainsi, une famille de **deux** vecteurs est libre si et seulement si ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Attention, cela n'est plus vrai pour une famille d'au moins trois vecteurs.

d. On déduit de manière immédiate de la définition le résultat suivant :

Proposition 8.14

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors pour toutes familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels :

$$\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = \sum_{i=1}^{p} b_i x_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ a_i = b_i$$

Proposition 8.15

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

i. Si $\mathcal{F}$ contient le vecteur nul, alors la famille $\mathcal{F}$ est liée.

ii. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors tous ses vecteurs sont non nuls.

iii. $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

iv. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exercice 8.6 Démontrer la proposition 8.15.

Remarques

a. Attention au point *iii* de cette proposition : une famille peut être liée alors qu'aucun vecteur n'est proportionnel à un autre. Par exemple, la famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ est liée puisque le troisième vecteur est égal à la somme des deux premiers.

b. Par ailleurs, lorsqu'une famille est liée, l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres, mais un vecteur quelconque n'est pas nécessairement combinaison linéaire des autres.

C.3. Bases

Définition 8.16

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $\mathcal{F}$ est une **base** de F si vecteur de F peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x \in F,\ \exists!\,(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{R}^p\ /\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

Dans ce cas, pour un vecteur x de F s'écrivant sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$, la famille $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est appelée famille des composantes (ou des coordonnées) de x dans la base $\mathcal{F}$.

Théorème 8.17

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
La famille $\mathcal{F}$ est une base de F si et seulement si elle est libre et génératrice de F.

Remarques

a. Attention, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ différent de $\{0\}$, F admet une infinité de bases. Il faut donc éviter de parler de *la* base de F, mais bien de parler *d'une* base de F.

b. La connaissance d'une base de F permet donc de décrire tous les éléments de F.

C.4. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 8.18 ▶ Théorème de la dimension

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si F possède une base, alors toutes les bases de F ont le même nombre de vecteurs ; ce nombre de vecteurs est alors appelé **dimension** de F et noté $\dim(F)$.
Par convention, on pose : $\dim(\{0\}) = 0$.

Exercice 8.7 Démontrer que $\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,1,1),(2,0,1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et prouver qu'il est de dimension 2.

Proposition 8.19

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension égale à p et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

i. Si la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ est libre, alors : $q \leqslant p$,

ii. Si la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ est génératrice de F, alors : $q \geqslant p$.

Remarque En conséquence de cette proposition, toute famille comportant au moins $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est nécessairement liée et toute famille contenant au plus $n-1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne peut être génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 8.20

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension finie égale à p et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de p vecteurs de F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de F,

ii. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre,

iii. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est génératrice de F.

Remarque Bien retenir ce résultat, fondamental. En particulier, pour démontrer qu'une famille est une base de F, on démontrera le plus souvent qu'elle est libre et comporte autant de vecteurs de F que la dimension de F. En effet, il est en général plus simple de prouver qu'une famille est libre que de prouver qu'elle est génératrice de F.

C.5. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice

Définition 8.21

Si $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel et si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 8-1

F est inclus dans $\mathbb{R}^3$ par définition. De plus, on a :

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

donc $(0,0,0)$ appartient à F (qui n'est donc pas vide). Soient alors (u,v) un couple d'éléments de F et λ un réel. En notant $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$ et $w = \lambda u + v$, on a :

$$w = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

et :

$$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = \lambda(ax + by + cz) + (ax' + by' + cz')$$

et donc, comme u et v appartiennent à F :

$$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$$

donc $w \in F$ et :

$$\forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u + v \in F$$

Correction de l'exercice 8-2

- F est inclus dans $\mathbb{R}^3$ par définition.
- De plus on a :

  $$2 \times 0 + 3 \times 0 - 0 = 0 \quad \text{et} \quad x - 0 = 0$$

  donc le vecteur $(0,0,0)$ appartient à F, qui n'est donc pas vide.
- Soit alors $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ deux éléments de F et λ un réel. On a :

  $$\lambda u + u' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

  Par ailleurs on a :

  $$\begin{aligned} 2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') - (\lambda z + z') &= \lambda(2x + 3y - z) + (2x' + 3y' - z') \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  et de même :

  $$\begin{aligned} (\lambda x + x') - (\lambda y + y') &= \lambda(x - y) + (x' - y') \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Ainsi $\lambda u + u'$ appartient à F, qui est donc stable par combinaison linéaire.

On déduit de ces trois points que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 8-3

1. On note :

   $$F = \left\{ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

   Par définition, F est une partie de $\mathbb{R}^n$. De plus F contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ (donc F n'est pas vide). Soient alors $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. En notant $w = \lambda x + y$, on a : $w = (\lambda x_i + y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et :

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

   et donc, comme x et y appartiennent à F :

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda x_i + y_i) = 0$$

   donc $w \in F$ et :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

   ce qui nous permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Se démontre comme le point précédent.

Correction de l'exercice 8-4

Soit $u = (x, y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On souhaite prouver qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$u = au_1 + bu_2 + cu_3$$

Or on a, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} u = au_1 + bu_2 + cu_3 &\iff (x, y) = (a + b - c, a - b + 2c) \\ &\iff \begin{cases} a + b - c = x \\ a - b + 2c = y \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} a + b - c = x \\ 2b - 3c = x - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = x - b + c \\ 2b = x - y + 3c \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant en particulier $c = 0$, on voit que $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$ conviennent, donc :

$$u = \frac{x+y}{2}\, u_1 + \frac{x-y}{2}\, u_2 + 0 \cdot u_3$$

ce qui nous permet de conclure que (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 8-5

- Supposons qu'il existe un scalaire λ tel que : $x = \lambda y$ (le cas où $y = \lambda x$ se traite de manière analogue). On a alors :

  $$1 \cdot x + (-\lambda) y = 0$$

  donc, comme $(1, -\lambda) \neq (0, 0)$, la famille (x, y) est liée.
- Supposons que la famille (x, y) soit liée. Il existe alors un couple $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que :

  $$ax + by = 0$$

  Si $a \neq 0$, alors on a :

  $$x = -\frac{b}{a}\, y$$

  et si $b \neq 0$, alors on a :

  $$y = -\frac{a}{b}\, x$$

  donc dans tous les cas, il existe un scalaire λ tel que :

  $$x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$$

Correction de l'exercice 8-6

On note $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$.

1. Supposons que $\mathcal{F}$ contienne le vecteur nul. Si $x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors en notant $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, on a :

   $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \neq 0$$

   donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.
2. Par contraposition, le point précédent nous permet d'affirmer que, si la famille $\mathcal{F}$ est libre, aucun de ses vecteurs n'est nul.
3. Supposons que $\mathcal{F}$ soit liée. Alors il existe une famille $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de scalaires non tous nuls telle que :

   $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$$

Il existe alors $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\alpha_i \neq 0$ et alors :

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} -\frac{\alpha_k}{\alpha_i} x_k$$

donc x_i est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $i \in [\![2, n]\!]$ tel que x_i soit combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_n$. Il existe alors une famille $(\alpha_k)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}}$ de scalaires telle que :

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k x_k$$

et alors, en notant $\alpha_i = -1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \neq 0$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

Correction de l'exercice 8-7

On note :

$$u_1 = (1, -1, 0), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (2, 0, 1), \quad F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$

D'après le théorème 8.9, on peut déjà affirmer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs on peut remarquer que :

$$u_3 = u_1 + u_2$$

donc on a :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

Ainsi la famille (u_1, u_2) est génératrice de F. De plus elle est libre (car elle ne contient que deux vecteurs et creux-ci ne sont pas colinéaires), donc c'est une base de F et :

$$\dim(F) = 2$$

Sommaire