

# Matrices carrées

ECG Maths Appliquées  
Semestre 1

## A. Vocabulaire

### Définition 7.1

La matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients  $m_{1,1}, m_{2,2}, \dots, m_{n,n}$ , qui sont égaux à 1, est appelée **matrice identité** ou **matrice unité** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $I_n$ .

### Définition 7.2

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les coefficients  $m_{1,1}, \dots, m_{i,i}, \dots, m_{n,n}$  sont appelés coefficients diagonaux de  $M$ .

### Définition 7.3

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que :

- i.  $M$  est une **matrice diagonale** si :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i \neq j, m_{i,j} = 0$ ,
- ii.  $M$  est une **matrice triangulaire supérieure** si :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i > j, m_{i,j} = 0$ ,
- iii.  $M$  est une **matrice triangulaire inférieure** si :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i < j, m_{i,j} = 0$ ,
- iv.  $M$  est triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou inférieure.

- Exercice 7.1**
- Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire supérieure.
  - Le produit de deux matrices triangulaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est-il toujours une matrice triangulaire ?

## B. Polynôme d'une matrice carrée

### B.1. Puissances d'une matrice carrée

#### Définition 7.4

Soit  $M$  une matrice appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit la matrice  $M^k$  par la relation de récurrence :

$$M^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, M^{k+1} = MM^k = M^k M$$

#### Proposition 7.5

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\forall (p, k) \in \mathbb{N}^2, M^{p+k} = M^p M^k = M^k M^p$$

**Exemple 7.1** Si  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on peut remarquer que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et alors :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et donc :

$$\forall k \geq 3, M^k = M^3 M^{k-3} = 0$$

**Remarque** Une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour laquelle il existe un entier naturel  $k$  tel que  $M^k = 0$  est appelée **matrice nilpotente**.

### Proposition 7.6

Soient  $M$  et  $N$  deux matrices appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $M$  et  $N$  commutent alors, pour tout  $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $M^k$  et  $N^p$  commutent.

#### Preuve

On suppose que  $M$  et  $N$  commutent et on prouve tout d'abord par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la proposition  $\mathcal{H}(p)$  : «  $M^p$  et  $N$  commutent ».

◇ Si  $p = 0$ , alors  $M^0 = I_n$  par convention et on a alors :

$$M^0 N = N = N M^0$$

donc  $\mathcal{H}(0)$  est vraie.

◇ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathcal{H}(p)$  est vraie. On a :

$$M^{p+1} N = M^p M N$$

et donc, comme  $M$  et  $N$  commutent, ainsi que  $M^p$  et  $N$  :

$$\begin{aligned} M^{p+1} N &= M^p N M \\ &= N M^p M \\ &= N M^{p+1} \end{aligned}$$

donc :  $\mathcal{H}(p) \implies \mathcal{H}(p+1)$ .

◇ Ainsi, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}(p)$  est vraie.

Soit alors  $p \in \mathbb{N}$ . Comme  $M^p$  et  $N$  commutent, on déduit alors de la récurrence précédente (en substituant  $M^p$  à  $N$  et  $N$  à  $M$ ) que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^p$  et  $N^k$  commutent. □

### Proposition 7.7

Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $D$  est une matrice diagonale et si ses coefficients diagonaux sont, dans cet ordre,  $d_1, \dots, d_n$ , alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D^k$  est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont, dans cet ordre,  $d_1^k, \dots, d_n^k$ .

**Proposition 7.8 ► Formule du binôme de Newton**

Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $M$  et  $N$  commutent, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (M + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} N^k M^{p-k}$$

**Remarques**

- Comme pour tout résultat mathématique, il est fondamental de ne pas oublier les hypothèses ( $M$  et  $N$  commutent) avant d'appliquer ce résultat. Très souvent, l'une des matrices sera du type  $\lambda I_n$  et la commutativité sera immédiate dans ce cas.
- En pratique, cette formule n'a d'intérêt que si les puissances des matrices  $M$  et  $N$  sont simples à calculer, soit parce que ces matrices sont simples (matrice diagonale, matrice nilpotente), soit par qu'il est simple de conjecturer un résultat par récurrence.

**Preuve**

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{H}(p)$  la proposition :

$$\ll (M + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p-k} \gg$$

et on démontre par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}(p)$  est vraie.

◇ Par convention, on a :  $(M + N)^0 = I_n$  et :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} M^k N^{0-k} = \binom{0}{0} M^0 N^0 = I_n$$

donc  $\mathcal{H}(0)$  est vraie.

◇ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{H}(p)$  soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} (M + N)^{p+1} &= (M + N)(M + N)^p \\ &= (M + N) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^{k+1} N^{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p+1-k} \end{aligned}$$

soit encore, en effectuant le changement d'indice  $k := k + 1$  dans la première somme :

$$\begin{aligned} (M + N)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} M^k N^{p+1-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \left[ \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right] M^k N^{p+1-k} + N^{p+1} - \binom{p}{p+1} M^{p+1} \end{aligned}$$

et alors, d'après la formule du triangle de Pascal et en remarquant que  $\binom{p}{p+1} = 0$  :

$$\begin{aligned} (M + N)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} M^k N^{p+1-k} + N^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} M^k N^{p+1-k} \end{aligned}$$

et donc :  $\mathcal{H}(p) \implies \mathcal{H}(p+1)$ .

◇ Finalement,  $\mathcal{H}(p)$  est vraie pour tout entier naturel  $p$ , ce qui prouve le résultat annoncé.  $\square$

## B.2. Polynômes de matrices carrées

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier naturel non nul.

### Définition 7.9

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout polynôme  $P$  tel que  $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ , la matrice

$$P(M) = \sum_{k=0}^d a_k M^k$$

est appelée polynôme en  $M$ .

On dira que le polynôme  $P$  est un **polynôme annulateur** de  $M$  si  $P(M)$  est la matrice nulle.

**Exercice 7.2** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le polynôme  $P(x) = (x + 1)^3$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Remarques**

- On rappelle que, pour toute matrice carrée  $M$ , on a, par convention :  $M^0 = I$ .
- Attention au coefficient constant du polynôme.  
Par exemple, si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P(x) = x^2 + x + \boxed{2}$ , alors :  $P(M) = M^2 + M + \boxed{2I}$ .
- Les propriétés suivantes se déduisent de manière immédiate des propriétés des polynômes et des puissances de matrices :

### Proposition 7.10

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a :

- $\forall P \in \mathbb{R}[x], \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda P)(M) = \lambda P(M)$ ,
- $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[x])^2, (P + Q)(M) = P(M) + Q(M)$ ,
- $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[x])^2, (PQ)(M) = P(M) \times Q(M) = Q(M) \times P(M)$ .

## C. Matrices carrées inversibles

### C.1. Généralités

#### Définition 7.11

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $M$  est **inversible** s'il existe une matrice  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$MN = NM = I_n.$$

Lorsqu'elle existe, une telle matrice  $N$  est appelée **inverse** de  $M$  et notée  $M^{-1}$ .

Le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formé des matrices inversibles est noté  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Remarques**

- La matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  n'est pas inversible.
- La notion d'inversibilité n'a de sens que pour les matrices carrées. En effet, même si  $M$  et  $N$  sont deux matrices rectangulaires telles que les produits  $MN$  et  $NM$  existent, les matrices  $MN$  et  $NM$  ne sont de même format (et ne peuvent donc être égales) que si  $M$  et  $N$  sont carrées).

**Exercice 7.3** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que  $(M - I_3)^3 = 0$ .
2. En développant  $(M - I_3)^3$  et en factorisant  $M$ , en déduire que  $M$  est inversible et préciser la matrice  $M^{-1}$ .

**Remarques**

- a. Bien retenir cet exemple, dont la méthode s'avérera très utile dans un grand nombre de situations.
- b. On verra plus tard d'autres méthodes pratiques pour étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer son inverse éventuelle.

### Définition 7.12

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

- i. On dit que  $M$  est inversible à gauche s'il existe une matrice  $N$  (appelée inverse de  $M$  à gauche) telle que :  $NM = I_n$ .
- ii. On dit que  $M$  est inversible à droite s'il existe une matrice  $M$  (appelée inverse de  $N$  à droite) telle que :  $MN = I_n$ .

### Théorème 7.13

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $M$  est inversible,
- ii. il existe une matrice  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MN = I_n$ ,
- iii. il existe une matrice  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $NM = I_n$ .

De plus, dans les points ii et iii, on a :  $M^{-1} = N$ .

**Remarques**

- a. Ce résultat sera démontré dans le chapitre 8. Espaces vectoriels.
- b. Ainsi une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite (ou à gauche) et dans ce cas l'inverse, l'inverse à gauche et l'inverse à droite sont égales.

### Proposition 7.14

Soient  $A, B, C$  trois éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- i. Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et :  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ii. Si  $A$  est inversible, alors  ${}^tA$  est inversible et :  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .
- iii. Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- iv. Si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  sont inversibles.
- v. Si  $A$  est inversible, alors :  $AB = AC \implies B = C$ .

**Remarque**

Attention en particulier au dernier point. En effet, l'égalité  $AB = AC$  n'implique pas en général que les matrices  $B$  et  $C$  soient égales, même si  $A$  n'est pas la matrice nulle. Par exemple, on peut remarquer que :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.4** Démontrer la proposition 7.14.

## C.2. Lien avec les systèmes linéaires

### Théorème 7.15

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $A$  est inversible,
- ii. pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le système  $AX = Y$  admet une unique solution  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,
- iii. le système homogène  $AX = 0$  admet une unique solution  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

- Remarques**
- a. Une preuve de ce théorème sera proposée dans le chapitre 10 Applications linéaires.
  - b. Le théorème 7.15 est particulièrement utile pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée.

**Exemple 7.2** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\begin{aligned} MX = 0 &\implies \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = -2y \\ -3y = 0 \end{cases} \\ &\implies x = y = 0 \\ &\implies X = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $M$  est inversible.

- Remarques**
- a. Bien retenir la méthode utilisée ici, qui sera très souvent utilisée pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée. Attention cependant, elle est inutile si l'on souhaite déterminer l'inverse !
  - b. En revanche, elle peut être adaptée pour déterminer l'inverse d'une matrice. En effet, on peut remarquer que, si  $A$  est inversible, l'unique solution  $X$  de l'équation  $AX = Y$  est nécessairement  $X = A^{-1}Y$ .

### Méthode 7.16

Pour étudier l'inversibilité et, le cas échéant, déterminer l'inverse d'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$ , on peut résoudre, pour  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  quelconque fixé, le système linéaire  $AX = Y$ , par exemple à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

### Proposition 7.17

Une matrice **triangulaire** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.  
Par conséquent, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

- Remarques**
- a. Ce résultat a été démontré dans le chapitre 6.. Calcul matriciel et systèmes linéaires.
  - b. ATTENTION!!! Ce résultat n'est vrai que si la matrice  $M$  est triangulaire. Par exemple, si l'on considère la matrice  $M$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on peut remarquer que :

$$MM = I_2,$$

ce qui prouve que  $M$  est inversible (d'inverse  $M$ ), bien que ses coefficients diagonaux soient nuls.

**Exemple 7.3** On reprend l'exemple précédent. Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\begin{aligned} MX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -3x_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $M$  est inversible et que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

- Exercice 7.5**
1. Étudier l'inversibilité et, le cas échéant, déterminer l'inverse, de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ .
  2. Même question avec la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### Proposition 7.18

Soit  $D$  une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $D$  est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux  $d_1, \dots, d_n$  sont **tous** non nuls et dans ce cas,  $D^{-1}$  est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}$ .

#### Preuve

- ◇ Une matrice diagonale est triangulaire, donc d'après 7.15,  $D$  est inversible si et seulement si  $d_1, \dots, d_n$  sont tous non nuls.
- ◇ On suppose maintenant que  $d_1, \dots, d_n$  de  $D$  sont tous non nuls, on peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} = I_n$$

ce qui prouve le résultat attendu.

□

### C.3. Le cas des matrices carrées d'ordre 2

#### Définition 7.19

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On appelle **déterminant** de  $M$  le réel :  $\det(M) = ad - bc$ .

#### Proposition 7.20

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors  $M$  est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul et on a, dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.6** On se propose de démontrer la proposition 7.20. Pour cela, on considère une famille  $(a, b, c, d)$  d'éléments de  $\mathbb{R}$  et on note :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que :  $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$ .
2. On suppose que :  $ad - bc \neq 0$ . Dédurre du résultat précédent que  $M$  est inversible et déterminer son inverse.
3. On suppose maintenant que  $ad - bc = 0$ . Montrer que  $M$  n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde).

### C.4. Étude de l'inversibilité : méthode du pivot de Gauss

Dans ce paragraphe,  $n$  et  $p$  désignent deux entiers naturels non nuls.

#### Définition 7.21

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Les opérations suivantes sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes** de  $M$  (où  $i$  et  $j$  sont deux éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ) :

- i.* échanger les lignes  $i$  et  $j$  (opération notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ ),
- ii.* multiplier la ligne  $i$  par un scalaire **non nul** (opération notée  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ),
- iii.* ajouter un multiple de ligne  $j$  à la ligne  $i$  (opération notée  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ).

Lorsqu'on effectue une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de  $M$ , la matrice obtenue est dite équivalente à  $M$ .



**Proposition 7.22**

Soient  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\alpha, \beta$  deux éléments de  $\mathbb{R}$  tels que  $\alpha \neq 0$ .

- i. Effectuer l'opération élémentaire  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  équivaut à multiplier  $M$  à gauche par la matrice diagonale

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \alpha & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

- ii. Effectuer l'opération élémentaire  $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$  équivaut à multiplier  $M$  à gauche par la matrice triangulaire (supérieure si  $i < j$ , inférieure sinon) :

$$T_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & \beta & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$\uparrow$   
 $j^{\text{ème}}$   
 colonne

- iii. Effectuer l'opération élémentaire  $L_i \leftrightarrow L_j$  équivaut à multiplier à gauche par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 $i^{\text{ème}}$                        $j^{\text{ème}}$   
 colonne                      colonne

$\leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne}$

**Remarque**

On vérifie sans mal que les matrices  $D_\alpha$  et  $T_{\alpha,\beta}$  sont triangulaires et qu'aucun de leurs coefficients diagonaux ne sont nuls si  $\alpha \neq 0$ , donc que ces matrices sont inversibles. De plus, on peut remarquer que  $P^2 = I_n$ , donc  $P$  est inversible (et  $P^{-1} = P$ ). On en déduit de manière immédiate les résultats suivants :

**Théorème 7.23**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $M$  est inversible si et seulement si toute matrice déduite de  $M$  par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes est inversible.

**Remarque**

Puisqu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice  $M$  revient à multiplier  $M$  à gauche par une certaine matrice inversible, une idée pour étudier l'inversibilité de  $M$  peut être de partir de l'égalité  $M = I_n M$  et d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de  $M$  jusqu'à en déduire la matrice  $I_n$  : cela revient en effet, lorsque cela est possible, à multiplier successivement par des matrices  $P_1, \dots, P_n$  à gauche jusqu'à obtenir une égalité de la forme  $I_n = (P_n P_{n-1} \dots P_1) M$ , qui permet d'affirmer que  $M$  est inversible et que son inverse est  $M^{-1} = P_n P_{n-1} \dots P_1$ . Cela nous conduit à proposer la méthode suivante :

**Méthode 7.24 ► Inversibilité d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss**

Pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et, le cas échéant, déterminer son inverse, on peut partir de l'égalité  $M = I_n M$  puis effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de  $M$  et de  $I_n$  (les mêmes sur les deux matrices), en procédant comme suit :

1. Si les coefficients de la première colonne de  $M$  sont tous nuls,  $M$  n'est pas inversible.
2. Si l'un au moins des coefficients de la première colonne de  $M$  n'est pas nul, alors :
  - si  $m_{1,1} = 0$ , et si l'un au moins des coefficients de la première colonne n'est pas nul, on échange  $L_1$  avec  $L_i$  où  $L_i$  est une ligne dont le premier coefficient n'est pas nul (on suppose pour la suite que  $m_{1,1} \neq 0$ ),  $m_{1,1}$  est appelé premier **pivot**,
  - pour tout entier  $i$  compris entre 2 et  $n$ , on effectue l'opération élémentaire :

$$L_i \leftarrow m_{1,1} L_i - m_{i,1} L_1$$

ces opérations ont pour effet d'annuler tous les coefficients de la première colonne, sauf le premier,

- on reproduit ensuite le raisonnement sur la sous-matrice formée par les  $n-1$  dernières colonnes et les  $n-1$  dernières lignes, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une matrice triangulaire : si la matrice triangulaire  $T$  ainsi obtenue (appelée **réduite de Gauss** de  $M$ ) est inversible (c'est-à-dire si tous les coefficients diagonaux de  $T$  sont non nuls), alors  $M$  est également inversible, sinon,  $M$  n'est pas inversible.
3. Dans le cas où l'on a abouti à une équivalence du type

$$M = I_n M \iff T = PM$$

où  $T$  est une matrice triangulaire inversible, on poursuit les opérations élémentaires sur les lignes de  $T$  et de  $P$ , jusqu'à déduire de  $T$  la matrice  $I_n$  et aboutir à une équivalence de la forme

$$M = I_n M \iff I_n = QM$$

qui permet d'affirmer que :  $M^{-1} = Q$  ; pour cela, on procède comme dans les premiers points mais en partant de la dernière colonne, puis l'avant dernière, et ainsi de suite.

**Exemple 7.4**

Ce long discours étant sans doute obscur, empressons nous de l'éclaircir par deux exemples lumineux et étudions ainsi l'inversibilité des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



1. On a :

$$A = I_3 A \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{aligned}
 A = I_3 A &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} A
 \end{aligned}$$

La matrice  $T$  est triangulaire et l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, donc elle n'est pas inversible, donc, comme elle est déduite de  $A$  par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes,  $A$  n'est pas inversible.

2. De même, on a :

$$\begin{aligned}
 B = I_3 B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B
 \end{aligned}$$

La matrice  $T$  est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible, ce qui permet d'affirmer que  $B$  est inversible. On poursuit donc les opérations, en faisant  $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$  :

$$\begin{aligned}
 B = I_3 B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B & L_2 \leftarrow -L_2 \\
 &\Leftrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que  $B$  est inversible et :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.7** Étudier l'inversibilité des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



## D. Correction des exercices

### Correction de l'exercice 7-1

1. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad N = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où l'on a donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i > j, m_{i,j} = n_{i,j} = 0$$

On note également :

$$MN = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où l'on a donc, par définition du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j}$$

et comme  $m_{i,k} = 0$  si  $i > k$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{i,j} = \sum_{k=1}^i m_{i,k} n_{k,j}$$

et comme  $n_{k,j} = 0$  si  $k > j$  :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i > j, p_{i,j} = 0$$

donc :

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire supérieure.

**N.B.** On démontre de manière analogue que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

2. On peut remarquer que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, les matrices  $M$  et  $N$  étant triangulaires :

Le produit de deux matrices triangulaires n'est pas toujours une matrice triangulaire

### Correction de l'exercice 7-2

Si on note  $P(x) = (x+1)^3$ , alors on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= (A+I)^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc :

$P$  est un polynôme annulateur de  $A$

**Correction de l'exercice 7-3**

1. On a :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$(M - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a alors :

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I_3 = 0$$

et donc :

$$M^3 - 3M^2 + 3M = I_3$$

donc, en factorisant  $M$  à gauche (respectivement à droite) :

$$M(M^2 - 3M + 3I_3) = (M^2 - 3M + 3I_3)M$$

et donc :

$$M \text{ est inversible et } M^{-1} = M^2 - 3M + 3I_3$$

**Correction de l'exercice 7-4**

i. On suppose que  $A$  est inversible. On a alors :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

ce qui prouve que  $A^{-1}$  est inversible à gauche, d'inverse à gauche  $A$ , donc, d'après 7.13 et comme  $A^{-1}$  est une matrice carrée :

$$\text{Si } A \text{ est inversible, alors } A^{-1} \text{ est inversible et : } (A^{-1})^{-1} = A$$

ii. On suppose que  $A$  est inversible. En transposant l'égalité  $AA^{-1} = I_n$ , on obtient :

$${}^t(A^{-1}){}^tA = I_n$$

ce qui prouve que  ${}^tA$  est inversible à gauche, d'inverse à gauche  ${}^t(A^{-1})$ , donc, comme  ${}^tA$  est une matrice carrée :

$$\text{Si } A \text{ est inversible, alors } {}^tA \text{ est inversible et : } ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

iii. On suppose que  $A$  et  $B$  sont inversibles. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure, comme  $AB$  est une matrice carrée :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont inversibles, alors } AB \text{ est inversible et : } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

iv. On suppose que  $AB$  est inversible. Il existe alors une matrice  $C$  telle que :

$$(AB)C = C(AB) = I_n$$

et alors :

$$A(BC) = I_n \quad \text{et} \quad (CA)B = I_n$$

ce qui prouve que  $A$  est inversible à droite et que  $B$  est inversible à gauche, nous permettant de conclure, comme  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées :

$$\boxed{\text{Si } AB \text{ est inversible, alors } A \text{ et } B \text{ sont inversibles}}$$

v. On suppose que  $A$  est inversible. On a alors :

$$\begin{aligned} AB = AC &\implies A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\implies (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\implies B = C \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 7-5

1. Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 + 4x_3 = y_1 + y_2 \\ -2x_2 - 8x_3 = -3y_1 + y_3 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ &\iff \underbrace{\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 + 4x_3 = y_1 + y_2 \\ 0 = -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}}_{(S_Y)} \end{aligned}$$

Pour  $Y = 0$ , le système  $(S_Y)$  admet une infinité de solutions, donc on peut conclure :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$$

2. Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned}
 BX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_3 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_2 \\ 3x_2 = -2y_1 + y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} Y
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

### Correction de l'exercice 7-6

1. On a :

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et alors :

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

et donc :

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0$$

2. Comme  $ad - bc \neq 0$ , on a, d'après le résultat précédent :

$$(a+d)M - M^2 = (ad-bc)I_2$$

et donc :

$$\frac{1}{ad-bc} [(a+d)I_2 - M]M = I_2$$

En posant  $N = \frac{1}{ad-bc} [(a+d)I_2 - M]$ , on a alors :  $NM = I_2$ , ce qui nous permet de conclure :

Si  $ad - bc \neq 0$ ,  $M$  est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} [(a+d)I_2 - M] = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Comme  $ad - bc = 0$ , on a :

$$M^2 - (a + d)M = 0$$

Raisonnons alors par l'absurde et supposons que  $M$  soit inversible. En multipliant par  $M^{-1}$ , on obtient alors :

$$M - (a + d)I_2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$

et donc :

$$a = b = c = d = 0$$

donc  $M = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse d'inversibilité de  $M$ , donc  $M$  n'est pas inversible. On peut alors conclure :

Si  $ad - bc = 0$ , alors  $M$  n'est pas inversible

### Correction de l'exercice 7-7

► On applique la méthode du pivot de Gauss. On a :

$$\begin{aligned} M = I_4 M &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} M & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} M \end{aligned}$$

La matrice  $T$  est triangulaire et l'un de ses coefficients diagonaux est nul, donc elle n'est pas inversible, ce qui nous permet de conclure :

$M$  n'est pas inversible

► Compte tenu de la première ligne de  $N$ , on peut adapter un peu la méthode en cherchant une matrice triangulaire inférieure, déduite de  $N$  par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} N = I_4 N &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N \end{aligned}$$

La matrice  $T$  est triangulaire et aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul, donc elle est inversible. Par conséquent on peut déjà affirmer que  $N$  est inversible. On poursuit donc les opérations, en faisant  $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$  :

$$\begin{aligned}
 N = I_4 N &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N & \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} N & \quad L_4 \leftarrow 3L_4 + 2L_3 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} N
 \end{aligned}$$

et donc, en divisant la deuxième et la quatrième ligne par 3, la troisième ligne par  $-3$  :

$$N = I_4 N \iff I_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} N$$

ce qui nous permet de conclure :

$$N \text{ est inversible et } N^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



©

*WWW.STEPHANEPRETESEILLE.COM*

# Sommaire

<b>Matrices carrées</b> .....	1
A. Vocabulaire .....	1
B. Polynôme d'une matrice carrée .....	1
B.1. Puissances d'une matrice carrée .....	1
B.2. Polynômes de matrices carrées .....	4
C. Matrices carrées inversibles .....	4
C.1. Généralités .....	4
C.2. Lien avec les systèmes linéaires .....	6
C.3. Le cas des matrices carrées d'ordre 2 .....	8
C.4. Étude de l'inversibilité : méthode du pivot de Gauss .....	8
D. Correction des exercices .....	12

WWW.STEPHANEPRETRESSELLE.COM

