6 Calcul matriciel et systèmes linéaires

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

Bien que les questions qui seront rencontrées dans ce chapitre soient souvent très calculatoires, ce chapitre est particulièrement important car les méthodes rencontrées seront utilisées par la suite en de nombreuses occasions. C'est pourquoi il est important que les notions étudiées ici, ainsi que les exercices d'application qui sont proposés, fassent l'objet d'une étude approfondie, car cela permettra une plus rapide assimilation des chapitres suivants.

A. Généralités sur les matrices

Dans l'ensemble de ce paragraphe, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Définition 6.1

On appelle **matrice** de type (n,p) ou matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute application M de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{R}$.
De plus, si M est la matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\,,\ M(i,j) = m_{i,j}$$

on notera $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et on représentera M sous la forme d'un tableau :

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{\text{ère}} & j^{\text{ème}} & p^{\text{ème}} \\ \text{colonne} & \text{colonne} & \text{colonne} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \\ \vdots \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \vdots \\ \leftarrow n^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire $m_{i,j}$ est appelé **coefficient** de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de M.

Notation 6.2

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Si $n = p$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarques

a. On assimile l'ensemble $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ des matrices à une ligne et une colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$ avec l'ensemble $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'une matrice $M = (c)$ ne possédant qu'un seul coefficient pourra également être notée $M = c$.

b. Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients $m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n}$ sont appelés coefficients diagonaux de M.

Définition 6.3

i. Si $n = 1$, un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice ligne**.

ii. Si $p = 1$, un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice colonne**.

iii. Si $n = p$, un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice carrée** d'ordre n.

iv. L'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf les coefficients diagonaux, tous égaux à 1, est appelé **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et noté I_n, ou I s'il n'y a pas de confusion possible.

v. L'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice nulle** et noté $O_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou plus simplement 0 lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Proposition 6.4

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont le même format et si leurs coefficients sont égaux. En particulier, une matrice est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition.

B. Opérations matricielles

B.1. Addition et multiplication

Dans l'ensemble de ce paragraphe, n, p, q et r sont des entiers naturels non nuls.

Définition 6.5

Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit :

i. **l'addition de deux matrices** en notant :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2 \ / \ M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}},\ N = (n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}},\ M+N = (m_{i,j}+n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

ii. **la multiplication d'une matrice par un scalaire** en notant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \ / \ M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}},\ \lambda M = (\lambda m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Remarque Il est important de bien noter que la somme de deux matrices M et N n'est définie que si M et N sont de même format (même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p) et que le résultat est encore une matrice du même format.

Exemples 6.1 **a.** Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$M+N = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-1 & 1+2 & 0+1 \\ 2-2 & -1+1 & 2+0 & 3+0 \\ -1+1 & 1+0 & 1+1 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$, alors :

$$\lambda M = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times 3 \\ 2\times 7 & 2\times 2 & 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 6.6

Étant données trois matrices M, N, P appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et deux scalaires λ, μ, on a :

i. $(M+N)+P = M+(N+P)$ (l'addition est associative),

ii. $M+N = N+M$ (l'addition est commutative),

iii. $O_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} + M = M + O_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} = M$,

iv. $\lambda\,(M+N) = \lambda M + \lambda N$,

v. $(\lambda+\mu)\,M = \lambda M + \mu M$,

vi. $(\lambda\mu)\,M = \lambda\,(\mu M)$,

vii. $1 \cdot M = M$.

Remarque Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

Définition 6.7

Étant donnés un élément $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et un élément $N = (n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on appelle **produit de M par N** et on note $M \times N$ ou plus simplement MN la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$MN = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \quad \text{avec} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\,,\ p_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\, n_{k,j}$$

En particulier, pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et toute matrice colonne $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$MX = \left(\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\, x_k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

Remarques

a. Attention, pour que le produit MN ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de M soit égal au nombre de lignes de N. En particulier, les matrices M et N ne sont pas nécessairement de même format pour que le produit MN existe.

b. Il est important de comprendre que, si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le produit MN existe, mais pas le produit NM, sauf si $q = n$.

c. Enfin, même si lorsque les produits MN et NM existent, ils ne sont en général pas égaux (et pas du même format le plus souvent).

Exemple 6.2 On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N, donc le produit MN existe et on a :

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\times 1+1\times 2 & 1\times 0+1\times 1 & 1\times 1+1\times 3 & 1\times 0+1\times 4 \\ 2\times 1+1\times 2 & 2\times 0+1\times 1 & 2\times 1+1\times 3 & 2\times 0+1\times 4 \\ 0\times 1+1\times 2 & 0\times 0+1\times 1 & 0\times 1+1\times 3 & 0\times 0+1\times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En revanche, le nombre de colonnes de N est différent du nombre de lignes de M, donc le produit NM n'existe pas.

Exercice 6.1 Dans chacun des cas suivants, dire si les produits MN et NM existent et, le cas échéant, effectuer le calcul.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Remarques

a. Si le produit MN de deux matrices existe, il peut être nul sans qu'aucune des deux ne le soit. Par exemple, on peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Si M et N sont deux matrices, il est possible que le produit MN existe mais que ce ne soit pas le cas du produit NM (*cf.* exercice 6.1).

c. Si M et N sont deux matrices telles que les deux produits MN et NM existent, ils ne sont pas toujours égaux (*cf.* exercice 6.1).

Proposition 6.8

Étant données trois matrices M, N, P appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, on a :

$$(MN)\,P = M\,(NP)$$

On dit que la multiplication de matrices est associative.

Preuve On note :

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad N = (n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \quad \text{et} \quad P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$$

On note également :

$$MN = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \quad \text{et} \quad (MN)\,P = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$$

Par définition du produit matriciel, on a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\,,\ a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\,n_{k,j}$$

et alors :

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]\,,\ b_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell}\, p_{\ell,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\, n_{k,\ell}\, p_{\ell,j}\end{aligned}$$

De même, on pose :

$$NP = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \quad \text{et} \quad M\,(NP) = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$$

Par définition du produit matriciel, on a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]\,,\ c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q} n_{i,\ell}\, p_{\ell,j}$$

et alors :

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]\,,\ d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\, c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} m_{i,k}\, n_{k,\ell}\, p_{\ell,j} \\ &= b_{i,j}\end{aligned}$$

ce qui prouve que : $(MN)\,P = M\,(NP)$.

$\square$

Proposition 6.9

La matrice I_n est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ I_n M = M I_n = M$$

Exercice 6.2 Démontrer la proposition 6.9.

Définition 6.10

Étant données deux matrices M et N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M et N **commutent** si les matrices MN et NM sont égales :

$$M \text{ et } N \text{ commutent} \quad \Longleftrightarrow \quad MN = NM$$

Remarques

a. On en profite pour rappeler que la multiplication de matrices **n'est pas** commutative, c'est-à-dire que deux matrices quelconques ne commutent pas toujours (voir exercice 6.1).

b. Pour toute matrice M carrée d'ordre n, M commute avec la matrice nulle et avec la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

B.2. Transposée d'une matrice

Définition 6.11

Étant donnée une matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle **transposée** de M la matrice ${}^tM = (m'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ m'_{i,j} = m_{j,i}$$

Remarque On peut remarquer que transposer une matrice M revient à échanger ses lignes et ses colonnes : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, les coefficients de la $i^{ème}$ ligne de ${}^tM$ sont les coefficients de la $i^{ème}$ colonne de M.

Exemples 6.3

a. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a : ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, alors on a : ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Définition 6.12

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que :

i. M est une **matrice symétrique** si : ${}^tM = M$,

ii. M est une **matrice antisymétrique** si : ${}^tM = -M$.

Remarque Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il est immédiat d'après la définition que :

a. M est une **matrice symétrique** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ m_{i,j} = m_{j,i}$.

b. M est une **matrice antisymétrique** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ m_{i,j} = -m_{j,i}$.

Proposition 6.13

Soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$${}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda\, {}^tM + \mu\, {}^tN$$

On dit que l'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Preuve On note :

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{et} \quad N = (n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

On a alors :

$$\lambda M + \mu N = (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

et alors, par définition de la transposée :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda M + \mu N) &= (\lambda m_{j,i} + \mu n_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \\ &= \lambda\,(m_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + \mu\,(n_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \\ &= \lambda\, {}^tM + \mu\, {}^tN \end{aligned}$$

□

Proposition 6.14

Soient M et N deux matrices telles que le produit MN ait un sens. Alors le produit ${}^tN\,{}^tM$ a un sens et :

$$ {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM $$

Preuve On note :

$$ M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}, \quad N = (n_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p,\\ 1\leqslant j\leqslant q}}, \quad {}^tM = (m'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}, \quad {}^tN = (n'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}, $$
$$ MN = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \quad \text{et} \quad {}^t(MN) = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant n}} $$

On a alors :

$$ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\,,\ a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\, n_{k,j} $$

et par définition de la transposée :

$$ \begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ a'_{i,j} &= a_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} m_{j,k}\, n_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} n'_{i,k}\, m'_{k,j} \end{aligned} $$

et donc : ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$. □

Exercice 6.3 Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, les matrices ${}^tMM$ et $M\,{}^tM$ sont symétriques.

B.3. Notions de matrices blocs

Dans l'ensemble de ce paragraphe, n, p, q désignent trois entiers naturels non nuls.

Définition 6.15

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on appelle :

i. $i^{\text{ème}}$ **vecteur ligne** de M l'élément $M_i = (m_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$,

ii. $j^{\text{ème}}$ **vecteur colonne** de M l'élément $M^{(j)} = (m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 6.16

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les vecteurs lignes sont notés $M_1, \ldots, M_n$ et N une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont notés $N^{(1)}, \ldots, N^{(q)}$.

i. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de MN est $M_iN^{(j)}$.

ii. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de MN est M_iN.

iii. Pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de MN est $MN^{(j)}$.

C. Systèmes linéaires

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

C.1. Équation linéaire, système d'équations linéaires

Définition 6.17

On appelle **équation linéaire** à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ dans $\mathbb{R}$ toute équation de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b$$

où $a_1, \dots, a_p, b$ sont des scalaires fixés.
Plus généralement, on appelle **système linéaire** tout système de n équations linéaires, c'est-à-dire tout système (S) de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{cases}$$

où les éléments des familles $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des scalaires fixés et $x_1, \dots,_p$ les inconnues.
Étant donné le système (S) précédent :

i. pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est appelé **coefficient** de la $i^{ème}$ équation (ou ligne) et de la $j^{ème}$ inconnue (ou colonne) du système,

ii. $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelé **second membre** du système,

iii. les p-uplets $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ vérifiant (S) sont appelés **solutions** de (S).

Exemples 6.4

a. L'équation $2x + 3y = 1$, d'inconnue (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, est une équation linéaire, admettant une infinité de solutions, qui sont les éléments de l'ensemble $\left\{\left(a, \dfrac{1-2a}{3}\right),\ a \in \mathbb{R}\right\}$.

b. Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, est un système linéaire admettant $(1,0)$ pour unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

c. Le système $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$, d'inconnue (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$, est un système linéaire n'admettant aucune solution.

Définition 6.18

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de scalaires. Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{cases}$$

i. On dit que (S) est un **système homogène** si $b_1, \dots, b_n$ sont tous nuls (on dit aussi que (S) est un système sans second membre).

ii. Si (S) admet un second membre, on appelle **système homogène associé** au système (S) le système $(\mathscr{H})$ sans second membre :

$$(\mathscr{H}) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = 0 \\ a_{2,1}\,x_1 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = 0 \end{cases}$$

Définition 6.19

Étant donné un système linéaire (S), on dit que :

i. (S) est **incompatible** lorsqu'il n'a aucune solution,

ii. (S) est **indéterminé** lorsqu'il possède une infinité de solutions,

iii. (S) est **équivalent** au système linéaire (S') si ces deux systèmes ont les mêmes solutions.

C.2. Systèmes remarquables

Définition 6.20

On dit qu'un système linéaire (S) est un **système de Cramer** s'il possède une unique solution.

Définition 6.21

On considère un système linéaire (S) de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$:

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{cases}$$

i. On dit que (S) est un **système échelonné** si :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ \forall j \in [\![1, n-1]\!]\,,\ (\forall k \in [\![1, j]\!]\,,\ a_{i,k} = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![1, j+1]\!]\,,\ a_{i,k} = 0)$$

autrement dit si, pour toute ligne i du système, lorsque les coefficients de $x_1, \dots, x_j$ sont nuls sur la ligne i, alors les coefficients de $x_1, \dots, x_j, x_{j+1}$ sont nuls sur la ligne suivante.

ii. On dit que (S) est un **système triangulaire** si $n = p$ et si :

$$\left(\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0\right) \quad \text{ou} \quad \left(\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0\right)$$

Remarques

a. Si $n = p$, un système échelonné est également triangulaire.

b. L'intérêt des systèmes échelonnés et triangulaires réside dans le fait que ces systèmes se résolvent très simplement par substitution : la ligne comportant le moins d'inconnue (la première ou la dernière) permet d'exprimer une inconnue en fonction d'un certain nombre d'autres inconnues, et on remplace dans les autres lignes, et ainsi de suite (*cf.* exemples suivants pour la précision de la méthode).

Exemples 6.5 **a.** Le système (S_1) : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ z=2 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, est échelonné ; on peut le résoudre par substitution. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2=0 \\ z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2-y \\ z=2 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de (S_1) est : $\{(-2-y,y,2),\ y\in\mathbb{R}\}$.

b. Le système (S_2) : $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ y+2z=1 \\ z=2 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est un système triangulaire ; on peut le résoudre par substitution. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ y+2z=1 \\ z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y-2=0 \\ y+4=1 \\ z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x-5=0 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases} \iff (x,y,z)=(-5,-3,2)$$

donc $(-5,-3,2)$ est l'unique solution du système (S_2).

c. Le système $\begin{cases} 2x+y+z+3t=1 \\ z+2t=3 \\ t=2 \end{cases}$, d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ est un système échelonné ; on peut le résoudre par substitution. Pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{cases} 2x+y+z+3t=1 \\ z+2t=3 \\ t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z+6=1 \\ z+4=3 \\ t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+5=1 \\ z=-1 \\ t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4-2x \\ z=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ de (S_3) est : $\{(x,-4-2x,-1,2)),\ x\in\mathbb{R}\}$.

C.3. Écriture matricielle d'un système linéaire

Dans ce paragraphe, $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux familles de réels.

On rappelle que la définition du produit matriciel permet d'écrire, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de scalaires :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\,x_1+\cdots+a_{1,j}\,x_j+\cdots+a_{1,p}\,x_p \\ a_{2,1}\,x_1+\cdots+a_{2,j}\,x_j+\cdots+a_{2,p}\,x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1+\cdots+a_{n,j}\,x_j+\cdots+a_{n,p}\,x_p \end{pmatrix}$$

Cela nous conduit à la définition suivante, qui permettra souvent une résolution plus simple (du moins en termes de notations) des systèmes linéaires :

Définition 6.22

Étant donné le système linéaire

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + \cdots + a_{2,j}\,x_j + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $\mathbb{R}^p$, on appelle **matrice du système linéaire** (S) la matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Le système (S) peut alors s'écrire sous la forme $AX = B$, où $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est le second membre et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est l'inconnue (appartenant à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$).

D. Solutions d'un système linéaire

D.1. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Théorème 6.23

Tout système homogène possède au moins une solution. De plus, s'il possède une solution non nulle, alors l'ensemble des solutions est infini.

Preuve Matriciellement, un système homogène $(\mathscr{H})$ peut s'écrire sous la forme $AX = 0$, il est évident que $X = 0$ en est une solution.
Supposons alors que l'équation $AX = 0$ admette une solution X non nulle. On peut alors remarquer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ A(\lambda X) = \lambda(AX) = 0$$

donc λX est solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ de l'équation, qui admet donc une infinité de solutions (l'ensemble $\{\lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est infini puisque X est non nul). $\square$

Théorème 6.24

Soient (S) un système linéaire et $(\mathscr{H})$ son système homogène associé. Si X_0 est une solution particulière du système (S), alors :

$$X \text{ est solution de } (S) \iff X - X_0 \text{ est solution de } (\mathscr{H})$$

En conséquence, (S) est un système de Cramer si et seulement si $(0, \ldots, 0)$ est l'unique solution du système homogène $(\mathscr{H})$.

Exercice 6.4 Démontrer le théorème 6.24.

Proposition 6.25

Un système **triangulaire** est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Remarque Une preuve de cette proposition est apportée dans le paragraphe « Pour aller plus loin ».

D.2. Résolution de systèmes par la méthode du pivot de Gauss

Définition 6.26

Soit (S) un système de n équations linéaires. Les opérations suivantes sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes** de (S) (où i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$) :

i. échanger les lignes i et j (opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$),

ii. multiplier la ligne i par un scalaire α **non nul** (opération notée $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$),

iii. ajouter un multiple de ligne j à la ligne i (opération notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_i$).

Proposition 6.27

L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ; autrement dit, un système (S) est équivalent à tout système (S') déduit de (S) par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Remarque Il s'agit d'un résultat fondamental puisqu'il permet d'aborder la résolution d'un système en le transformant, par opérations élémentaires sur les lignes, en un système plus simple à résoudre (idéalement échelonné ou triangulaire). En pratique, cela sera rendu possible grâce au théorème suivant (que l'on admet) :

Théorème 6.28

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Méthode 6.29 ▸ Méthode du pivot de Gauss

On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,j}\, x_j + \cdots + a_{1,p}\, x_p = b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + \cdots + a_{2,j}\, x_j + \cdots + a_{2,p}\, x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + \cdots + a_{n,j}\, x_j + \cdots + a_{n,p}\, x_p = b_n \end{cases}$$

On suppose que l'un au moins des coefficients du système n'est pas nul (sinon la résolution du système ne présente guère de difficulté).
La méthode du pivot de Gauss est un algorithme de résolution du système en procédant comme suit :

1. **Si l'un au moins des coefficients de la première colonne n'est pas nul**.
   (a) Si $a_{1,1}$ est nul, on échange la ligne L_1 avec l'une des $n-1$ autres lignes afin d'aboutir à un système équivalent dont le coefficient de la première ligne et de la première colonne ne soit pas nul (nous supposerons dans la suite que $a_{1,1} \neq 0$). On dit alors que $a_{1,1}$ est le premier pivot.
   (b) Pour tout entier $i \in [\![2,n]\!]$, on effectue l'opération élémentaire

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\, L_1 \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow a_{1,1}\, L_i - a_{i,1}\, L_1$$

   ce qui a pour effet d'annuler tous les coefficients de la première colonne, à part le pivot, et de « transformer » le système (S) en un système (S_1) équivalent, de la forme suivante :

$$(S_1) : \begin{cases} \alpha_{1,1}\, x_1 + \quad \alpha_{1,2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1,j}\, x_j + \cdots + \alpha_{1,p}\, x_p = \beta_1 \\ \qquad\qquad \alpha_{2,2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{2,j}\, x_j + \cdots + \alpha_{2,p}\, x_p = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \alpha_{n,2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{n,j}\, x_j + \cdots + \alpha_{2,p}\, x_p = \beta_n \end{cases}$$

   (c) On reproduit alors ce raisonnement sur le système formé par les $n-1$ dernières lignes du système, jusqu'à obtenir un système échelonné.

2. **Si les coefficients situés sur la première colonne sont tous nuls**.
   (a) On détermine la première colonne sur laquelle se situe un coefficient non nul.
   (b) On procède à partir de cette colonne comme précédemment.

Exemple 6.6 Pour éclairer cette méthode, on se propose d'appliquer la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système

$$(S) = \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Le premier coefficient de la première ligne, égal à 2, n'est pas nul. On le choisit donc comme premier pivot pour annuler le premier coefficient des autres lignes et on effectue les opérations

$$L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \quad -3y - z = 2 \\ \quad\quad 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne n'est pas nul. On le choisit donc comme deuxième pivot pour annuler le deuxième coefficient de la troisième ligne et on effectue l'opération élémentaire

$$L_3 \leftarrow -3L_3 - 2L_2$$

qui nous donne :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \quad -3y - z = 2 \\ \quad\quad 14z = -13 \end{cases}$$

Ce dernier système est triangulaire. On obtient alors, par substitution :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{17}{14} \\ y = -\dfrac{5}{14} \\ z = -\dfrac{13}{14} \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure que $\left(\dfrac{17}{14}, -\dfrac{5}{14}, -\dfrac{13}{14}\right)$ est l'unique solution de (S).

Exercice 6.5 Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour résoudre les systèmes (d'inconnues réelles) :

1. $(S_1) : \begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - y - z + t = 3 \\ -x + 2z + t = -1 \\ 3x - 3y + 4z + 3t = 3 \end{cases}$

2. $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 6-1

1. ► Le nombre de colonnes de M correspond au nombre de lignes de N donc le produit MN existe et on a :

$$\boxed{MN = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 11 & 13 \\ -8 & -4 & -11 & -13 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

► Le nombre de colonnes de N correspond au nombre de lignes de M, donc le produit NM a un sens et on a :

$$\boxed{NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}}$$

Remarque On constate donc que, dans ce cas, les produits MN et NM existent tous les deux, mais les matrices MN et NM ne sont ni égales, ni du même format.

2. Dans ce cas encore, les deux produits existent et on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} MN = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \\ NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}}$$

3. Le produit MN n'existe pas, le produit NM existe et on a :

$$NM = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Dans ce cas :

$$\boxed{\text{Aucun des produits } MN \text{ et } NM \text{ n'existe}}$$

5. Dans ce cas, les deux produits MN et NM existent et on a :

$$\boxed{MN = NM = M}$$

6. Dans ce cas, les deux produits MN et NM existent et on a :

$$\boxed{MN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NM = -9}$$

Correction de l'exercice 6-2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note :

$$M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad MI_n = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad I_nM = (m''_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On en déduit, par définition du produit matriciel :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ m'_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\,\delta_{k,j} \\ &= m_{i,j} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ m''_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\,mk,j \\ &= m_{i,j} \end{aligned}$$

d'où : $MI_n = I_n = M$.

Correction de l'exercice 6-3

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On peut déjà remarquer que ${}^t\!M$ appartient à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc les produits ${}^t\!MM$ et $M\,{}^t\!M$ sont bien définis et :

$${}^t\!MM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M\,{}^t\!M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} {}^t\big({}^t\!MM\big) &= {}^t\!M\,{}^t\big({}^t\!M\big) \\ &= {}^t\!MM \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} {}^t\big(M\,{}^t\!M\big) &= {}^t\big({}^t\!M\big)\,{}^t\!M \\ &= M\,{}^t\!M \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } M \text{ de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^t\!MM \text{ et } M\,{}^t\!M \text{ sont symétriques}}$$

Correction de l'exercice 6-4

On considère l'écriture matricielle $AX = B$ du système (S), où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice du système, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le second membre et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est l'inconnue.
Si X_0 est une solution particulière du système (S), alors on a : $AX_0 = B$ et donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} AX = B &\iff AX = AX_0 \\ &\iff AX - AX_0 = 0 \\ &\iff A\,(X - X_0) = 0 \end{aligned}$$

donc X est une solution de (S) si et seulement si $X - X_0$ est solution de $(\mathscr{H})$.

Correction de l'exercice 6-5

1. On effectue les opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \text{et} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1,$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - y - z + t = 3 \\ -x + 2z + t = -1 \\ 3x - 3y + 4z + 3t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 5y - 10z - 2t = 0 \\ -2y + 5z + 2t = 0 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow 5L_4 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + 3z + t = 1 \\ 5y - 10z - 2t = 0 \\ 5z + 6t = 0 \\ 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - \dfrac{13}{5}\,t = 1 \\ 5y + 10t = 0 \\ z = -\dfrac{6}{5}\,t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - \dfrac{7}{5}\,t \\ y = -2t \\ z = -\dfrac{6}{5}\,t \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure (en posant $t = 5a$) :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_12) \text{ est } \{(1 - 7a, -10a, -6a, 5a),\ a \in \mathbb{R}\}}$$

2. En effectuant $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$, on obtient :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 - 2y - z \\ z = 3y - 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

et donc :

$$\boxed{(1, 1, 1) \text{ est l'unique solution de } (S_2)}$$

Sommaire