5 Théorie des graphes

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

A. Notions de graphes

A.1. Graphes non orientés

Définition 5.1

i. Un **graphe non orienté** est un ensemble fini de points, appelés **sommets**, et de segments, appelés **arêtes**, reliant certains de ces points.

ii. On dit que deux sommets d'un graphe non orienté sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.

iii. On dit qu'un sommet est isolé lorsqu'il n'est relié à aucun autre (y compris à lui-même).

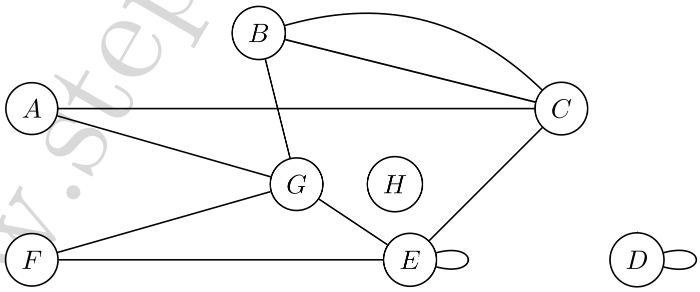
iv. Une **boucle** est une arête reliant un point à lui-même.

v. On dit qu'un graphe non orienté est **simple** s'il ne possède aucune boucle et si deux sommets quelconques sont reliés par au plus une arête.

vi. Si G est un graphe non orienté , on appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté dont les sommets sont des sommets de G et dont les arêtes sont des arêtes de G.

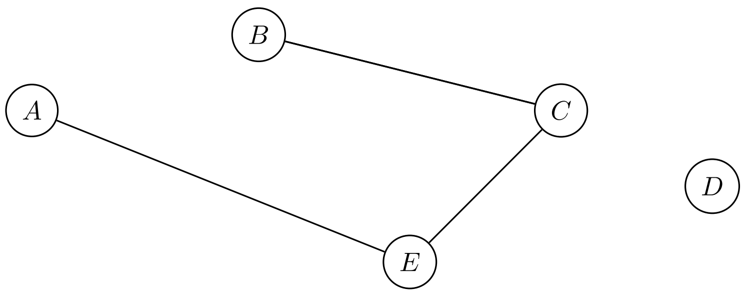
Exemple 5.1 Le graphe non orienté ci-dessous comporte 8 sommets et :

- le sommet A est adjacent aux sommets C et G uniquement,
- le graphe n'est pas simple car il comporte au moins une boucle (et de surcroît les sommets B et C sont reliés par deux arêtes),
- le sommet H est isolé.



Exemple 5.2 Le graphe non orienté ci-dessous comporte 5 sommets et :

- le sommet A est adjacent au E uniquement,
- le graphe est simple,
- le sommet D est isolé.

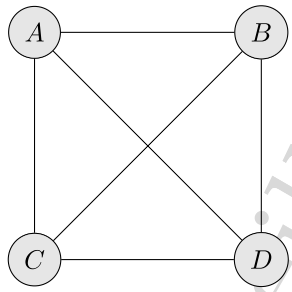


Remarque Le nombre de sommets d'un graphe est aussi appelé **ordre** du graphe.

Définition 5.2

On dit qu'un graphe non orienté simple est **complet** si ses sommets sont tous deux à deux adjacents.

Exemples 5.3 **a.** Le graphe suivant est complet :



b. Les graphes des exemples 5.1 et 5.2 ne sont pas complets : dans les deux cas, le sommet D n'est pas relié au sommet A, par exemple.

Définition 5.3

i. On appelle **ordre** d'un graphe le nombre total de sommets qu'il comporte.

ii. On appelle **degré** d'un sommet S le nombre total d'arêtes ayant S pour extrémité (les boucles étant comptées deux fois) ; le degré d'un sommet S est noté $\deg(S)$.

Remarques **a.** Dans le calcul du degré d'un sommet S, une boucle compte double car S est en à la fois le point de départ et le point d'arrivée.

b. Si un graphe est complet et comporte n sommets, ceux-ci sont tous de degré $n-1$.

c. Le degré d'un point isolé est égal à 0.

Exemples 5.4 **a.** Le graphe de l'exemple 5.1 est d'ordre 8 (il comporte 8 sommets) et :

- le sommet A est de degré 2 (il est relié à C et G),
- le sommet B est de degré 3,
- le sommet H est de degré 0,
- le sommet D est de degré 2.

Exercice 5.1 1. On s'intéresse au graphe de l'exemple 5.1. Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré								

2. On s'intéresse au graphe de l'exemple 5.2. Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré					

Théorème 5.4 ▶ Formule d'Euler (dite des poignées de main)

La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes : si un graphe comporte n sommets $A_1, \dots, A_n$ et p arêtes alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(A_i) = 2p$$

Exercice 5.2 On considère un graphe complet G comportant n sommets $A_1, \dots, A_n$. Déterminer le nombre d'arêtes de ce graphe.

Définition 5.5

i. Dans un graphe non orienté, une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets pour laquelle chaque sommet de la liste est adjacent au sommet suivant.

ii. Le nombre d'arêtes composant une chaîne est appelé **longueur** de la chaîne.

iii. On dit qu'une chaîne est **fermée** lorsque son premier et son dernier sommets sont identiques.

iv. On dit qu'une chaîne est un **cycle** si elle est fermée et si ses arêtes sont deux à deux distinctes.

Remarques

a. Si deux sommets S_1 et S_2 d'un graphe peuvent être reliés par une chaîne, on appelle distance entre les sommets S_1 et S_2 la longueur minimale d'une chaîne reliant ces deux sommets (ce terme n'est pas au programme mais sera parfois utile).

b. Si un graphe G est connexe, on appelle diamètre de G la plus grande des distances entre deux sommets de G (ce terme n'est pas au programme mais sera parfois utile).

Définition 5.6

i. On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe toute chaîne contenant toutes les arêtes du graphe exactement une fois.

ii. On appelle cycle eulérien toute chaîne eulérienne fermée.

iii. On dit qu'un graphe est **eulérien** s'il comporte au moins un cycle eulérien.

Définition 5.7

On dit qu'un graphe non orienté est **connexe** si deux sommets distincts quelconques sont toujours reliés par au moins une chaîne.

Remarques

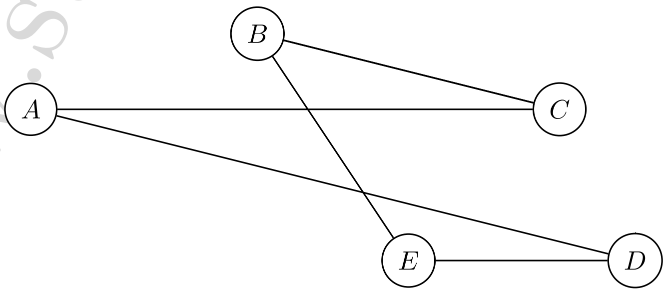
a. Un graphe eulérien est aussi connexe.

b. Un graphe connexe n'est pas toujours eulérien (voir exemples suivants).

c. Une chaîne eulérienne peut être représentée sur le graphe par une ligne continue ne passant pas deux fois par la même arête.

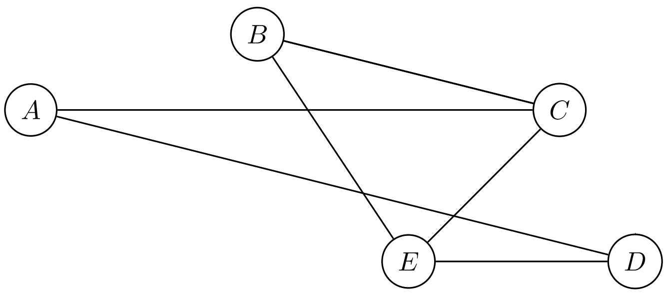
Exemples 5.5

a. On considère le graphe suivant :



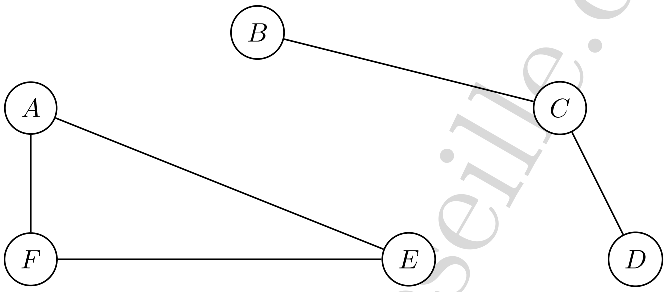
La chaîne $A-C-B-E-D-A$ est un cycle eulérien, donc le graphe est eulérien et connexe.

b. On considère maintenant le graphe suivant :



- $B-E-C-A$ est une chaîne de ce graphe,
- la chaîne $A-C-E-B-C-A$ est une chaîne fermée, mais ce n'est pas un cycle car elle contient deux fois l'arête AC,
- la chaîne $A-C-E-D-A$ est un cycle,
- la chaîne $A-C-B-E-D-A$ passe par tous les sommets, donc tous les sommets sont reliés par au moins une chaîne et le graphe est connexe,
- il n'existe pas de chaîne eulérienne (une justification rigoureuse sera apportée avec le théorème 5.8, donc le graphe n'est pas eulérien.

c. On considère enfin le graphe suivant :



- $A-E-F-A$ est une chaîne fermée dont les arêtes sont deux à deux distinctes, donc c'est un cycle du graphe,
- Ce graphe n'est pas connexe car, par exemple, les sommets A et B ne sont pas reliés par une chaîne.

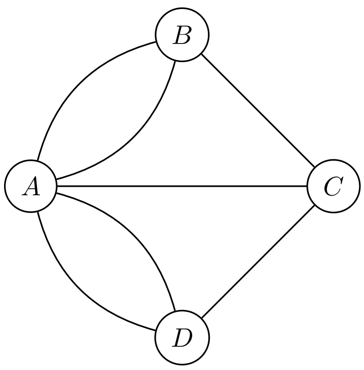
Théorème 5.8 ▶ Théorème d'Euler

i. Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

ii. Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si exactement deux de ses sommets sont de degré impair ; le cas échéant, ces deux points sont le point de départ et le point d'origine de la chaîne).

Remarque Ce théorème ne figure pas au programme, mais intervient dans un grand nombre de problèmes de la théorie des graphes, dont il en est à l'origine. Il est donc vraisemblable que son utilisation soit autorisée.

Exercice 5.3 Au XVIII-ème siècle, la ville de Königsberg (maintenant Kaliningrad, située en Russie baltique) était construite autour de deux îles et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles. On peut modéliser cela par le graphe non orienté suivant, dans le quel les arêtes désignent les ponts, les sommets A et C les deux îles et les sommets B et D les rives de la rivière.



1. Existe-t-il ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, en partant d'un point quelconque de revenir au point de départ en ayant emprunté chaque pont une fois et une seule ?
2. Existe-t-il ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, en partant d'un point quelconque de parcourir la ville en traversant tous les ponts exactement une fois ?

A.2. Graphes orientés

Définition 5.9

i. Un **graphe orienté** est un ensemble fini de points, appelés **sommets**, et de segments, appelés **arcs**, reliant certains de ces points et ne pouvant être parcourus que dans un sens.

ii. On dit qu'un sommet B est **adjacent** au sommet A lorsqu'il est relié à A par un arc orienté de A vers B.

iii. On dit qu'un sommet est isolé lorsqu'il n'est relié à aucun autre.

iv. Une **boucle** est un arc reliant un point à lui-même.

Définition 5.10

On appelle **degré** d'un sommet S d'un graphe orienté le nombre total d'arcs ayant S pour extrémité initiale ou finale ; le degré d'un sommet S est noté $\deg(S)$.

Remarque Dans le cas d'un sommet d'un graphe orienté, on parle aussi de degré entrant, noté $\deg^-(S)$, (respectivement de degré sortant, noté $\deg^+(S)$) du sommet S pour parler du nombre d'arcs dirigés vers S (respectivement partant de S) ; on a donc :

$$\deg(S) = \deg -(S) + \deg^+(S)$$

Théorème 5.11 ► Formule d'Euler (dite des poignées de main)

La somme des degrés des sommets d'un graphe orienté est égale au double du nombre d'arêtes : si un graphe comporte n sommets $A_1, \dots, A_n$ et p arêtes alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(A_i) = 2p$$

Plus précisément, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^+(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^-(A_i) = p$$

Définition 5.12

i. Dans un graphe orienté, une **chemin** (ou parcours) est une liste ordonnée de sommets pour laquelle chaque sommet est adjacent au précédent.

ii. Le nombre d'arêtes composant un chemin est appelé **longueur** de la chaîne.

iii. On dit qu'un chemin est **fermé** lorsque son premier et son dernier sommets sont identiques.

iv. On dit qu'un chemin est un **circuit** s'il est fermé et si ses arcs sont deux à deux distinctes.

Remarque Si deux sommets S_1 et S_2 d'un graphe orienté peuvent être reliés par un circuit, on appelle distance entre les sommets S_1 et S_2 la longueur minimale d'un circuit reliant ces deux sommets (ce terme n'est pas au programme mais sera parfois utile).

Définition 5.13

i. On appelle **chemin eulérien** d'un graphe tout chemin contenant tous les arcs du graphe exactement une fois.

ii. On appelle circuit (ou cycle) eulérien d'un graphe orienté tout chemin eulérien fermé.

iii. On dit qu'un graphe orienté est **eulérien** s'il comporte au moins un circuit eulérien.

Définition 5.14

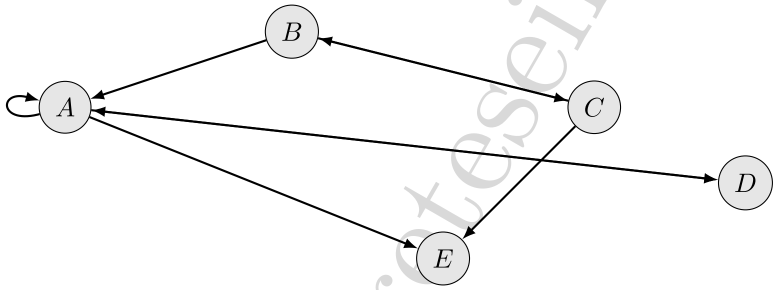
Soit G un graphe orienté.

i. On dit que G est **fortement connexe** (ou plus simplement **connexe**) si deux sommets distincts quelconques sont toujours reliés par au moins un chemin.

ii. On dit que G est **faiblement connexe** si, pour tous sommets S_1 et S_2, il existe une chaîne (en ne considérant pas l'orientation des arcs) allant du sommet S_1 au sommet S_2.

Remarque Le programme parle simplement de graphe connexe, même dans le cas de graphes orientés, n'indiquant pas que c'est la notion forte qui est retenue, mais nous avons fait ce choix en cohérence avec le théorème 5.20.

Exercice 5.4 Le graphe suivant est un graphe orienté.



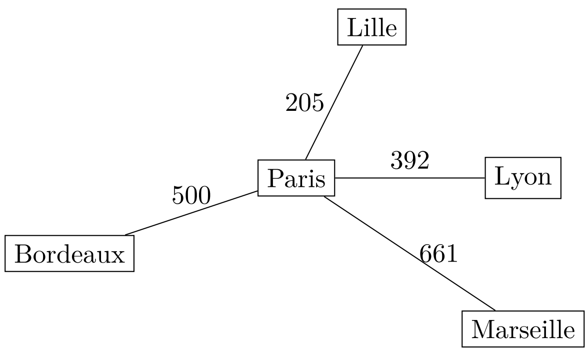
1. Déterminer les degrés de chacun des sommets.
2. Donner un chemin menant de C à A.
3. Le graphe est-il eulérien ?
4. Le graphe est-il fortement connexe ? est-il faiblement connexe ?

A.3. Graphes pondérés

Définition 5.15

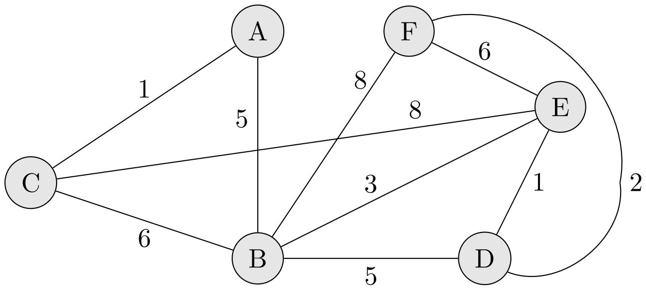
Un graphe pondéré est un graphe pour lequel on affecte un nombre, appelé poids, à chacune des arêtes. Le poids total d'une chaîne (ou d'un chemin) est égal à la somme des poids de ses arêtes.

Exemple 5.6 Le graphe suivant est un graphe pondéré. La pondération de chaque arête représente la distance en km en deux villes.



Méthode 5.16 ▶ Algorithme de Dijkstra

On dispose d'un graphe pondéré dont les sommets sont $S_1, \ldots, S_n$ et on considère que la pondération d'un arête correspond à la distance entre les deux sommets adjacents. On cherche à déterminer le plus court chemin entre les sommets S_1 et S_n.
Pour éviter un long discours théorique, nous allons expliquer la méthode au travers d'un exemple. Considérons ainsi le graphe pondéré suivant, et déterminons le plus court chemin de A à F :



Pour cela, on peut dresser un tableau à double entrée. On commence par reporter les noms des différents sommets puis à la première ligne, on donne au point de départ A le poids 0 et aux autres ∞.

Étape	A	B	C	D	E	F	G	Choix
1		0	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$

Ensuite, à la ligne 2, on complète ainsi :

- on met un trait dans la colonne A, indiquant ainsi qu'on n'y repassera pas (dans la recherche du plus chemin, il n'est pas pertinent de passer plusieurs fois par le même point),
- pour chaque sommet adjacent à A (ici B et C), on reporte le poids de l'arête menant de A ainsi que l'origine (qui sera indispensable à la fin),
- pour les autres sommets, on laisse la valeur ∞,
- on met en évidence la plus petite valeur de la ligne 2 et on reporte dans la colonne « Choix » le sommet correspondant ainsi que le poids total (dans le cas présent, $C(1)$).

Étape	A	B	C	D	E	F	G	Choix
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
2	-	$5(A)$	$\mathbf{1(\boldsymbol{A})}$	∞	∞	∞	∞	$C(1)$

On ne modifiera plus la colonne du sommet choisi (ici C). On reproduit le raisonnement précédent avec les sommets adjacents à C (en reportant le cumul des poids des arêtes rencontrées, uniquement dans le cas où ce cumul est inférieur au précédent) ; le sommet C ne menant qu'à E, cette étape est rapide. Le poids le plus faible étant désormais celui de la colonne B, on reporte $B(5)$ dans la colonne « Choix ».

Étape	A	B	C	D	E	F	G	Choix
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
2	-	$5(A)$	$\mathbf{1(\boldsymbol{A})}$	∞	∞	∞	∞	$C(1)$
3	-	$\mathbf{5(\boldsymbol{A})}$	-	∞	$9(C)$	∞	∞	$B(5)$

On reproduit le raisonnement jusqu'à ce que le point cible soit atteint (à chaque étape, si on obtient un poids total pour un sommet inférieur ou précédent, on le remplace comme c'est le cas à l'étape 4 pour le sommet E : la chaîne $A - B - E$ a en effet un poids inférieur à la chaîne $A - C - E$.

Étape	A	B	C	D	E	F	Choix
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
2	-	$5(A)$	$\mathbf{1(\boldsymbol{A})}$	∞	∞	∞	$C(1)$
3	-	$\mathbf{5(\boldsymbol{A})}$	-	∞	$9(C)$	∞	$B(5)$
4	-	-	-	$10(B)$	$\mathbf{8(\boldsymbol{B})}$	$13(B)$	$E(8)$
5	-	-	-	$\mathbf{9(\boldsymbol{E})}$	-	$13(B)$	$D(9)$
6	-	-	-	-	-	$\mathbf{11(\boldsymbol{D})}$	$F(11)$

En conclusion, le plus court chemin pour aller de A à F a un poids égal à 11. Pour obtenir une chaîne parcourant son chemin, on remonte la piste (en observant les cases grisées, et surtout le sommet indiqué dans cette case). Pour arriver à F avec un poids total de 11 :

- la dernière arête parcourue venait de D (étape 6),
- le plus court chemin pour arriver à D venait de E (étape 5),
- on a choisir d'arriver à E depuis B (étape 4),
- le plus court chemin pour arriver à B venait de A (étape 3).

Ainsi la chaîne $A - B - E - D - F$ forme le plus court chemin pour aller de A à F.

A.4. Graphes probabilistes

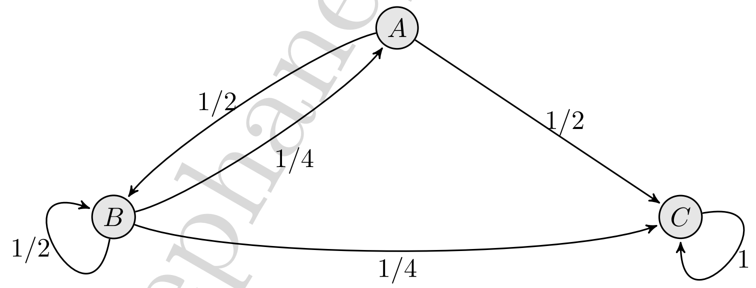
Définition 5.17

On appelle **graphe probabiliste** tout graphe orienté pondéré pour lequel la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est toujours égale à 1.

Exemple 5.7 Une puce se déplace sur un triangle ABC selon le modèle suivant :

- si à un instant donné la puce se situe sur le sommet A, elle sera sur le sommet B ou sur le sommet C de façon équiprobable à l'instant suivant,
- si à un instant donné la puce se situe sur le somme B, elle y reste à l'instant suivant avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace vers A ou C avec la même probabilité $\frac{1}{4}$,
- si à un instant donné elle est sur le sommet C, elle y reste.

On peut représenter ce modèle à l'aide du graphe orienté pondéré suivant :



B. Matrice d'adjacence

Dans cette section, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 5.18

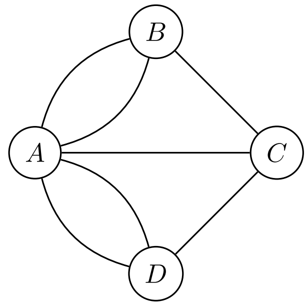
Soit G un graphe possédant n sommets $S_1, \ldots, S_n$.

i. Si G est un graphe non orienté, on appelle **matrice d'adjacence** de G la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes joignant les sommets S_i et S_j.

ii. Si G est un graphe orienté, on appelle **matrice d'adjacence** de G la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arcs menant du sommet S_i au sommet S_j.

Remarque Si les sommets du graphe sont des lettres ou des mots, on conviendra que cette définition s'applique en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Exercice 5.5 Écrire la matrice d'adjacence du graphe non orienté suivant :

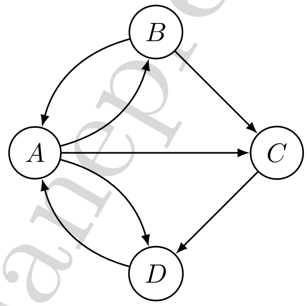


Exercice 5.6 Que peut-on dire de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté complet ?

Proposition 5.19

La matrice d'adjacence d'un graphe *non orienté* est toujours une matrice symétrique.

Exercice 5.7 Écrire la matrice d'adjacence du graphe orienté suivant :



Théorème 5.20

Soit G un graphe orienté dont les sommets sont $S_1, \dots, S_n$ et A sa matrice d'adjacence. On note :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ A^d = (a_{i,j}^{(d)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^{(d)}$ est égal au nombre de chemins de longueur d menant de S_i à S_j.

Théorème 5.21

Soit G un graphe orienté et A sa matrice d'adjacence. Le graphe G est connexe si et seulement si les coefficients de la matrice $\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{n-1}$ sont tous strictement positifs.

Exercice 5.8 Retrouver le résultat de l'exercice 5.3 en utilisant le théorème 5.21.Cheminsd

Exercice 5.9 Démontrer le théorème 5.21.

Remarque Si G est un graphe non orienté, on prouve de même que G est connexe si et seulement si les coefficients de la matrice $\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{n-1}$ sont tous strictement positifs (mais ce résultat n'est pas au programme).

C. Analyse de réseaux sociaux

Les notions introduites dans ce paragraphe sont données en guise d'exemples d'utilisation des graphes, mais elles ne sont pas exigibles des candidats.

Définition 5.22

Soit G un graphe non orienté dont les sommets sont $S_1, \ldots, S_n$ ($n \geqslant 2$). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle **degré de centralité** du sommet S_i le nombre total $c(S_i)$ de sommets autre que S_i directement reliés à S_i par une arête.
On appelle **degré normalisé de centralité** la proportion $c'(S_i)$ de sommets autres que S_i reliés à S_i par une arête :

$$c'(S_i) = \frac{c(S_i)}{n-1}$$

Remarques

a. Ainsi, plus le degré de centralité d'un sommet est élevé (le maximum étant égal à $n-1$), plus le sommet est en contact direct avec les autres, ayant ainsi potentiellement une forte influence.

b. Le degré normalisé de centralité d'un sommet est égal à la proportion de sommets qui lui sont adjacents.

Définition 5.23

Soit G un graphe non orienté dont les sommets sont $S_1, \ldots, S_n$ ($n \geqslant 2$). Pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$, on note :

- $n_{i,j}$ le nombre total de plus courtes chaînes menant de S_i à S_j,
- $n_{i,j}(k)$ le nombre total de plus courtes chaînes menant de S_i à S_j en passant par S_k.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle **degré d'intermédiarité** du sommet S_k le réel

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{n_{i,j}(k)}{n_{i,j}}$$

Remarque En additionnant toutes les proportions de plus courts chemins d'un sommet à un autre passant par S_k, l'intermédiarité d'un sommet permet donc de mesurer l'importance d'un sommet dans un réseau : plus le degré d'intermédiarité du sommet S_k est important, plus la communication devra passer par ce sommet pour aller d'un point à un autre rapidement.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 5-1

1. On complète ainsi :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	2	5	2	4	0

2. On complète ainsi :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	1	2	0	2

Correction de l'exercice 5-2

Comme le graphe G est complet :

- chaque sommet est adjacent à chacun des $n-1$ autres,
- il n'y a pas de boucle,
- une paire de sommets est reliée par exactement une arête.

On en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \deg(A_i) = n - 1$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(A_i) = n\,(n-1)$$

Il en découle, d'après la formule d'Euler, que le nombre d'arêtes est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.
N.B. On aurait aussi directement pu dire que, puisque le graphe est complet, le nombre d'arêtes est égal au nombre de paires de sommets, c'est-à-dire à $\binom{n}{2}$.

Correction de l'exercice 5-3

1. On peut remarquer que le graphe est connexe et on se demande s'il existe un chemin parcourant toutes les arêtes et revenant au point de départ, c'est-à-dire si le graphe est eulérien. On cherche donc le degré de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D
Degré	5	3	3	3

   Le graphe admet des sommets de degré impair donc, d'après le théorème d'Euler, il n'est pas eulérien. Par conséquent il n'est pas possible de parcourir la ville en empruntant tous les ponts une seule fois tout en revenant au point de départ.

2. On se demande maintenant s'il existe une chaîne eulérienne (ne revenant pas nécessairement au sommet d'origine). Or il existe au moins trois sommets ayant des degrés impairs donc, encore une fois d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne. Ainsi il n'est pas possible de parcourir la ville en empruntant tous les ponts une seule fois.

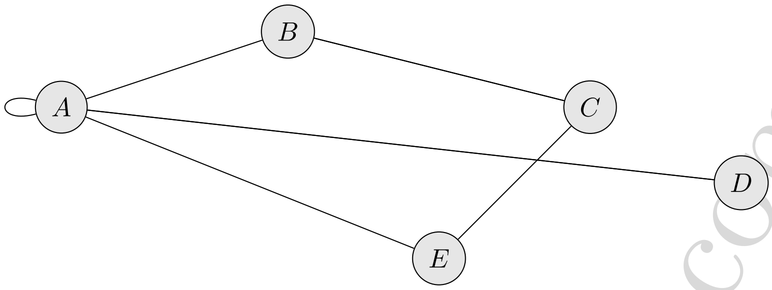
Correction de l'exercice 5-4

1. Voici les degrés des différents sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	2	2	2	2

2. On peut aller de C à A en empruntant le chemin $C - B - A$.
3. Il n'y a pas de chemin menant de E à l'un des autres sommets, donc il ne peut exister de circuit eulérien. Ainsi le graphe n'est pas eulérien.
4. ► Il n'y a pas de chemin menant de E à A, donc le graphe n'est pas fortement connexe.

► Si l'on ne tient pas compte de l'orientation des arcs, le graphe est le suivant :



On peut constater qu'il existe une chaîne passant par tous les sommets (la chaîne $A-B-C-E-A-D$) donc le graphe orienté est faiblement connexe.

Correction de l'exercice 5-5

La matrice d'adjacence du graphe est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5-6

Un graphe non orienté complet est un graphe simple dont les sommets sont deux à deux adjacents donc, si le graphe est d'ordre n et si ses sommets sont $S_1, \ldots, S_n$, alors, en notant A la matrice d'adjacence :

- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il n'y a pas de boucle reliant A_i à lui-même, donc les coefficients diagonaux de A sont tous nuls,
- pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, il y a exactement une arête reliant A_i et A_j, donc les coefficients non diagonaux de A sont tous égaux à 1.

Correction de l'exercice 5-7

La matrice d'adjacence du graphe est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que cette matrice n'est pas symétrique (ce serait le cas en présence d'un graphe orienté).

Correction de l'exercice 5-8

- Supposons que les coefficients de la matrice $\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^n$ soient tous strictement positifs.

  On peut remarquer que, par définition, les coefficients de A sont des entiers naturels. Il en découle, d'après la définition du produit matriciel, que les coefficients de A^d sont tous des entiers naturels pour tout $d \in \mathbb{N}$. Soit alors $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Comme les coefficients de $\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{n-1}$ sont tous strictement positifs, il existe donc $d \in [\![0, n-1]\!]$ tel que le coefficient $a_{i,j}^{(d)}$ de la ligne i et de la colonne j de A^d soit un entier naturel non nul. Ainsi il existe au moins une chaîne de longueur d (en fait exactement $a_{i,j}^{(d)}$) menant de S_i à S_j, ce qui prouve que le graphe est connexe.
- Réciproquement, supposons que le graphe soit connexe et considérons un couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Comme le graphe est connexe, il existe une chaîne menant de S_i à S_j. Considérons alors une telle chaîne et notons m sa longueur. On a donc :

  $$a_{i,j}^{(m)} > 0$$

  Montrons maintenant que l'on peut choisir $m \leqslant n-1$. Notons déjà que si la chaîne passe plusieurs fois par S_j, on peut la raccourcir en s'arrêtant au premier passage. Nous considérons maintenant qu'il n'y a pas de passage par S_j avant l'arrivée.

  — Si $m \leqslant n-1$, il n'y a rien à changer.

— Si $m \geqslant n$, la chaîne contient m arêtes, donc $m+1$ sommets. Or $m+1>n$, donc le chaîne passe plusieurs fois par le même sommet et on peut alors raccourcir la chaîne ainsi : pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ différent de j, on enlève toutes les arêtes comprises entre le premier passage par S_k et le dernier passage par S_k ; par exemple, si $(i,j)=(1,2)$ et si la chaîne initiale est :

$$S_1 - S_3 - S_4 - S_3 - S_5 - S_3 - S_4 - S_5 - S_4 - S_2$$

on remarque que des sous-chaînes ne font que rallonger la distance entre S_1 et S_2, celles que nous soulignons ici :

$$S_1 - S_3 - \underline{S_4 - S_3 - S_5 - S_3 -} S_4 - \underline{S_5 - S_4 -} S_2$$

et la chaîne peut donc être raccourcie pour obtenir :

$$S_1 - S_3 - S_2$$

qui ne passe pas deux fois par le même sommet. On obtient ainsi une chaîne de longueur d inférieur ou égale à $n-1$ car elle passe au maximum par n sommets.

Dans tous les cas, on en déduit qu'il existe $d \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $a_{i,j}^{(d)} > 0$. Comme cela est vrai pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il en découle comme précédemment que les coefficients de $\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{n-1}$ sont tous non nuls.

Correction de l'exercice 5-9

Supposons qu'il existe un graphe non orienté permettant de relier 15 ordinateurs entre eux de telle sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres. Alors, tous les sommets sont de degré 3 et la somme des degrés est égale à $3 \times 15 = 45$, ce qui est absurde (d'après la formule d'Euler) car 45 est impair.

Sommaire