4

Équations et inéquations : rappels fondamentaux

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

Les méthodes qui sont présentées ici sont exclusivement des rappels du collège et du lycée. Ce sont cependant des méthodes fondamentales qui doivent être parfaitement maîtrisées pour envisager de réfléchir dans de bonnes conditions à des problèmes plus délicats nécessitant des calculs. La rédaction de la résolution doit également être soignée.
Rappelons qu'une équation est une égalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs), appelées inconnues. Une solution de l'équation est une valeur de l'inconnue (ou des inconnues s'il y en a plusieurs) pour laquelle l'égalité est vraie. Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions de cette équation. Par exemple :

- $2x+4=0$ est une équation dont l'unique solution est -2,
- $x(x-1)=0$ est une équation, dont les solutions sont 0 et 1,
- $x^5-3x=-2x^2+x-1$ est une équation, dont 1 est **une** solution (il peut donc y en avoir d'autres, ce dont nous reparlerons ultérieurement).

Rappelons également qu'une inéquation est une inégalité dans laquelle figure une quantité inconnue (ou plusieurs), appelées inconnues. Une solution de l'inéquation est une valeur de l'inconnue (ou des inconnues s'il y en a plusieurs) pour laquelle l'inégalité est vraie. Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions de cette inéquation. Par exemple :

- $x+1\geqslant 0$ est une inéquation dont les solutions sont les éléments de l'ensemble $[-1,+\infty[$,
- $x^2>2$ est une inéquation, dont une solution est 3.

Il n'est pas question d'établir ici des méthodes permettant de résoudre de manière générale toutes les équations et inéquations (si cela était possible, les mathématiques perdraient un peu de leur splendeur), mais de rappeler les méthodes permettant de résoudre les plus simples d'entre elles, celles que tout étudiant en prépa doit impérativement savoir résoudre sans indication.

A. Rappels élémentaires : les règles de calculs

A.1. Addition et multiplications dans une égalité

Proposition 4.1

Soit a,b,c trois réels quelconques. On a :

i. $a=b\Longleftrightarrow a+c=b+c$

ii. $a=b\Longrightarrow ac=bc$

et même, si $c\neq 0$:

iii. $a=b\Longleftrightarrow ac=bc$

iv. $a=b\Longleftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$

Remarques

a. On pourra retenir que si l'on ajoute (ou retranche) un nombre quelconque des deux côtés d'une équation, on obtient une équation équivalente.

b. De même, on retiendra que si l'on multiplie (ou divise) les deux côtés d'une équation par un même nombre **non nul**, on obtient une équation équivalente.

c. La proposition suivante en est une conséquence immédiate :

Proposition 4.2

Soit a, b, c, d des réels quelconques. On a :

i. $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Longrightarrow a + c = b + d$

ii. $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Longrightarrow ac = bd$

A.2. Addition et multiplications dans une inégalité

Proposition 4.3

Soit a, b, c trois réels quelconques. On a :

i. $a \leqslant b \Longleftrightarrow a + c \leqslant b + c$

ii. si $c > 0$: $a \leqslant b \Longleftrightarrow ac \leqslant bc$

iii. si $c < 0$: $a \leqslant b \Longleftrightarrow ac \geqslant bc$

Remarques

a. On pourra retenir que si l'on ajoute (ou retranche) un nombre quelconque des deux côtés d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente.

b. De même, on retiendra que :

- si l'on multiplie (ou divise) les deux côtés d'une équation par un même nombre **strictement positif**, on obtient une équation équivalente en conservant l'ordre,
- si l'on multiplie (ou divise) les deux côtés d'une équation par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une équation équivalente en changeant l'ordre.

c. On en déduit les résultats suivants :

Proposition 4.4

Soit a, b, c trois réels quelconques. On a :

i. $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$

ii. $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow ac \leqslant bd$

iii. $0 < a \leqslant b \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

Remarque ATTENTION !!! Si l'on peut « ajouter » deux inégalités entre réels et « multiplier » deux inégalités entre réels positifs, on ne fera pas de soustraction ou de division.

A.3. Factorisation et développement

La factorisation étant à la base de la plupart des méthodes de résolution d'équations ou d'inéquations, on rappelle ici les formules les plus utiles, qui doivent être parfaitement maîtrisées :

Proposition 4.5

Pour tous réels a, b, c, d, on a :

i. $a\,(b + c) = ab + ac$

ii. $(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

iii. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

iv. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

v. $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

vi. $a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

A.4. Composition par une fonction

Proposition 4.6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et (a, b) un couple d'éléments de I.

i. Si f est croissante sur I, alors :

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow f(a) = f(b) \\ a \leqslant b &\Longrightarrow f(a) \leqslant f(b) \\ a < b &\Longrightarrow f(a) \leqslant f(b) \end{aligned}$$

ii. Si f est strictement croissante sur I, alors :

$$\begin{aligned} a = b &\Longleftrightarrow f(a) = f(b) \\ a \leqslant b &\Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b) \\ a < b &\Longleftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

iii. Si f est décroissante sur I, alors :

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow f(a) = f(b) \\ a \leqslant b &\Longrightarrow f(a) \geqslant f(b) \\ a < b &\Longrightarrow f(a) \geqslant f(b) \end{aligned}$$

iv. Si f est strictement décroissante sur I, alors :

$$\begin{aligned} a = b &\Longleftrightarrow f(a) = f(b) \\ a \leqslant b &\Longleftrightarrow f(a) \geqslant f(b) \\ a < b &\Longleftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Remarque Noter que, lorsque la fonction f est strictement monotone, il y a équivalence, ce qui n'est pas le cas lorsque la fonction n'est que monotone au sens large. En pratique, dans la résolution d'équations ou d'inéquations, c'est donc le plus souvent la stricte monotonie qui sera utilisée.

B. Résolution d'équations et d'inéquations

B.1. Résolution des équations et inéquations du premier degré

Définition 4.7

On appelle équation du premier degré toute équation de la forme $ax + b = 0$, où a, b sont deux réels supposés connus et x est l'inconnue.
On appelle inéquation du premier degré toute inéquation de la forme $ax + b \geqslant 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leqslant 0$ ou $ax + b < 0$, où a, b sont deux réels supposés connus et x est l'inconnue.

Remarques

a. Compte tenu des règles de calcul portant sur les équations, on peut aussi parler d'équation du premier degré pour toute équation de la forme $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont des réels supposés connus et x est l'inconnue.

b. On peut aussi parler d'inéquation du premier degré pour toute inéquation de la forme $ax+b \leqslant cx + d$ ou $ax + b < cx + d$, où a, b, c, d sont des réels supposés connus et x est l'inconnue.

c. Les règles de calcul rappelées dans la section précédente permettent d'affirmer de manière immédiate que :

Théorème 4.8

Soit a et b deux réels fixés.

i. Si $a \neq 0$, $x = -\dfrac{b}{a}$ est l'unique solution de l'équation $ax + b = 0$,

ii. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation $ax + b = 0$ n'a pas de solution,

iii. Si $a = 0$ et $b = 0$, alors tous les réels sont solution de l'équation $ax + b = 0$.

Méthode 4.9

Pour résoudre l'équation $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont des réels supposés connus et x est l'inconnue (appelées équations du premier degré), il suffit d'effectuer des additions et/ou divisions pour « isoler » l'inconnue.

Exemple 4.1 On cherche à résoudre l'équation $2x + 3 = -3x + 1$. Pour cela, on peut remarquer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 2x + 3 = -3x + 1 &\iff 2x - (-3x) = 1 - 3 \\ &\iff 5x = -2 \\ &\iff x = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $-\dfrac{2}{5}$ est l'unique solution de l'équation $2x + 3 = -3x + 1$.

B.2. Résolution d'équations et d'inéquations

Dans la plupart des cas, pour résoudre une équation, on essaiera donc de se rapporter à des équations du premier degré. Pour cela, on rappelle deux résultats fondamentaux :

Théorème 4.10

Pour tout couple (a, b) de réels, on a :

$$(ab = 0) \quad \iff \quad (a = 0 \ \text{ ou } b = 0)$$

et si $b \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0.$$

Théorème 4.11

Pour tout couple (a, b) de réels, on a :

i. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \implies ab > 0$

ii. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \implies ab > 0$

iii. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \implies ab < 0$

iv. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \implies ab < 0$

Remarque Cela nous conduit à la première méthode fondamentale suivante :

Méthode 4.12

Pour résoudre une équation de la forme $P(x) = Q(x)$ (respectivement une inéquation de la forme $P(x) \leqslant Q(x)$ ou $P(x) < Q(x)$), où P et Q sont des fonctions polynômes, on cherche en priorité à résoudre l'équation $P(x) - Q(x) = 0$ (respectivement l'inéquation $P(x) - Q(x) \leqslant 0$ ou $P(x) - Q(x) < 0$), en factorisant le plus possible $P(x) - Q(x)$.

Remarque Dans le cas d'équations ou d'inéquations faisant intervenir des fonctions rationnelles (quotients de polynômes), on adaptera la méthode en commençant par tout mettre au même dénominateur.

Exemple 4.2 On cherche à résoudre l'inéquation $\dfrac{5x-7}{x^2-1} \leqslant 1$. Pour cela, on commence par remarquer que le quotient n'a de sens que si x appartient à $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puis que, pour tout x appartenant à D :

$$\begin{aligned}\frac{5x-7}{x^2-1} \leqslant 1 &\Longleftrightarrow 1 - \frac{5x-7}{x^2-1} \geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \geqslant 0\end{aligned}$$

et alors, soit parce qu'on reconnaît des solutions évidentes, soit parce que l'on a calculé des discriminants :

$$\frac{5x-7}{x^2-1} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$$

On dresse alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

ce qui nous permet de conclure que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{5x-7}{x^2-1} \leqslant 1$ est :

$$]-\infty, -1[\cup]1, 2] \cup [3, +\infty[$$

B.3. Résolution des équations et inéquations du second degré

Définition 4.13

On appelle équation du second degré toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b, c sont des réels connus tels que $a \neq 0$ et x est l'inconnue.
On appelle inéquation du second degré toute inéquation de la forme $ax^2+bx+c \geqslant 0$, $ax^2+bx+c > 0$, $ax^2+bx+c \leqslant 0$ ou $ax^2+bx+c < 0$, où a, b, c sont des réels connus tels que $a \neq 0$ et x est l'inconnue.

Théorème 4.14

Soit (a, b, c) un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. On considère l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$, d'inconnue x réelle.

i. Si $b^2-4ac > 0$, l'équation (E) admet exactement deux solutions réelles distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De plus ax^2+bx+c est du signe de a sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$, du signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$.

ii. Si $b^2-4ac=0$, l'équation (E) une unique solution réelle, qui est : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
De plus ax^2+bx+c est du signe de a pour tout réel x.

iii. Si $b^2-4ac < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle.
De plus ax^2+bx+c est du signe de a pour tout réel x.

Dans tous les cas, le réel $\Delta = b^2-4ac$ est appelé discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Preuve Comme $a \neq 0$, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors :

i. Si $\Delta > 0$, alors :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Finalement, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet exactement deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ii. Si $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Finalement, l'équation (E) admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme unique solution .

iii. Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est jamais nul.

□

Exercice 4.1 1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2 + 3x = 1 - x^2$

(b) $\dfrac{6}{x-1} = \dfrac{x}{x-2}$

(c) $3x^2 + x - 1 = x^2 - 1$

(d) $\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0$

2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

(a) $(x+1)^2 = (3x-1)^2$

(b) $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$

(c) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{3x+5}{5-7x}$

(d) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$

(e) $\ln(x^2 - 1) = \ln(2x)$

Exercice 4.2 1. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

(a) $x^2 - 6x + 9 > (3-x)(x+4)$

(b) $\dfrac{4-2x}{x+3} > 0$

(c) $\dfrac{2x+3}{x-1} \geqslant \dfrac{4x}{2x-3}$

(d) $\mathrm{e}^{x^2} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} \geqslant 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2 \leqslant 6x - 9$

(b) $x^2 + 3x - 5 < x - 4$

(c) $3x + \dfrac{1}{2x} \leqslant \dfrac{5}{2}$

(d) $\dfrac{2}{x^2 - x - 6} \geqslant \dfrac{x}{2 - 3x - 2x^2}$

C. Utilisation d'une fonction

Il arrive fréquemment que l'on ne soit pas en mesure de déterminer précisément les solutions d'une équation, mais que la seule connaissance de leur nombre et éventuellement moins un encadrement de ces solutions éventuelles, soit suffisants pour le problème étudié. De même, il arrive fréquemment que le signe d'une expression ou qu'une comparaison entre deux expressions ne soit pas évidente à effectuer. Dans ces cas de figure, il est souvent intéressant d'étudier des fonctions.

L'objectif est ici de rappeler les résultats fondamentaux. Les notions de limites, de continuité et de dérivabilité seront redéfinies plus rigoureusement ultérieurement et l'on se contente pour le moment de rappeler que :

- les fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine carrée, exponentielle, logarithme, puissances) sont continues sur leur domaine de définition,
- la somme, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur I) de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur I,
- si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle J et si g est une fonction continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

C.1. Dérivées des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, f est une fonction dérivable en tout point d'une partie D de $\mathbb{R}$, f' désigne la dérivée de f sur D, n est un entier relatif, α est un réel strictement positif et c une constante réelle.

$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f'}$	$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f'}$	$\boldsymbol{D}$
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$

C.2. Opérations sur les dérivées

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda u)' = \lambda u'$
$(u+v)' = u' + v'$

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ si v ne s'annule pas sur I
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ si v ne s'annule pas sur I

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle J et si v est une fonction dérivable sur J, alors :

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times v' \circ u}$$

En particulier, si u est dérivable sur I, à valeurs dans J, on a :

formule	J
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathbb{R}_+^*$

C.3. Sens de variation d'une fonction dérivable

Théorème 4.15

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

i. Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I,

ii. Si f' est strictement positive sur I (sauf éventuellement sur un ensemble fini ou dénombrable), alors f est strictement croissante sur I,

iii. Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I,

iv. Si f' est strictement négative sur I (sauf éventuellement sur un ensemble fini ou dénombrable), alors f est strictement décroissante sur I.

C.4. Nombre de solutions d'une équation

Théorème 4.16 ▶ Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a et b sont deux éléments de I, alors, pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = d$.
En particulier, si f est une fonction continue et changeant de signe sur I, alors f s'annule au moins une fois sur I.

Remarque Attention à ce théorème, qui permet le plus souvent d'affirmer qu'une fonction s'annule *au moins* une fois. Lorsqu'on cherche à déterminer précisément le nombre de solutions d'une équation, c'est le plus souvent sa conséquence qu'on utilise :

Théorème 4.17 ▶ Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (dont les bornes, finies ou infinies, sont notées a et b), alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) dont les bornes sont les limites respectives de f en a et en b.

Méthode 4.18

Pour déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$, d'inconnue x appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut, lorsque les fonctions f et g sont dérivables sur I, étudier les variations de la fonction $f - g$: en utilisant le théorème de la bijection sur chacun des intervalles ou $f - g$ est monotone, on pourra ainsi déterminer le nombre de fois où $f - g$ s'annule.

Exemple 4.3 On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x-1} = x + 1$, d'inconnue x réelle. Ne sachant pas résoudre simplement cette équation, on étudie les variations de la fonction différence $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-1} - x - 1$. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-1} - 1$$

et donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2\,\mathrm{e}^{2x-1} > 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x-1} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et alors, la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2x - 1 > -\ln(2) \\ &\iff x > \frac{1 - \ln(2)}{2} \end{aligned}$$

On obtient de même, pour tout réel x :

$$f'(x) < 0 \iff x < \frac{1 - \ln(2)}{2}$$

Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{-1} - x\,\mathrm{e}^{-2x}\right) - 1.$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$$

donc on a, comme $\mathrm{e}^{-1} > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

De plus, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x-1} = 0$$

donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui nous permet de dresser le tableau de variations de f, en notant $x_0 = \dfrac{1 - \ln(2)}{2}$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f est continue et strictement monotone sur $]-\infty, x_0]$ et sur $]x_0, +\infty[$ donc réalise une bijection respectivement de $]-\infty, x_0]$ sur $[f(x_0), +\infty[$ et de $]x_0, +\infty[$ sur $]f(x_0), +\infty[$.
Enfin, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \exp\left(2 \times \frac{1-\ln(2)}{2} - 1\right) - \frac{1-\ln(2)}{2} - 1 \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - 1 \end{aligned}$$

Finalement, comme $2 \leqslant \mathrm{e}$ et comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leqslant \frac{\ln(\mathrm{e})}{2} - 1 \\ &\leqslant -\frac{1}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Cela implique que 0 appartient à $]x_0, +\infty[$ donc admet exactement un antécédent par f sur $]-\infty, x_0]$ et sur $]x_0, +\infty[$, ce qui permet finalement de conclure que l'équation $\mathrm{e}^{2x-1} = x + 1$ admet exactement deux solutions réelles.

C.5. Comparaison de fonctions

On a vu que les méthodes pour résoudre une équation et une inéquation sont assez proches. De même, on propose donc la méthode suivante :

Méthode 4.19

i. Si f est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, pour étudier le signe de f, on peut étudier ses variations.

ii. Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, pour démontrer une inégalité de la forme « $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$ », on peut étudier le signe de la fonction $f - g$ (ou $g - f$), par exemple en étudiant ses variations.

Exemple 4.4 On cherche à établir l'inégalité (classique !) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$. Pour cela, on peut étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1-x}{x} \end{aligned}$$

et donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Les limites en 0 et $+\infty$ sont inutiles et sont précisées ici pour le plaisir. En revanche, ce tableau de variations nous enseigne que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 0$$

ce qui prouve l'inégalité attendue.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 4-1

1. (a) Pour tout réel x, on a :

$$x^2+3x=1-x^2 \iff 2x^2+3x-1=0.$$

De plus l'équation $2x^2+3x-1=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est : $\Delta=17$, donc on peut conclure :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } x^2+3x=1-x^2 \text{ sont } -\frac{3+\sqrt{17}}{4} \text{ et } -\frac{3-\sqrt{17}}{4}}$$

(b) Les quotients $\dfrac{6}{x-1}$ et $\dfrac{x}{x-2}$ ont un sens si et seulement si x est différent de 1 et 2 et, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-1}=\frac{x}{x-2} &\iff 6\,(x-2)=x\,(x-1)\\ &\iff x^2-7x+12=0.\end{aligned}$$

De plus l'équation $x^2-7x+12=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est : $\Delta=1$, donc admet deux solutions exactement, qui sont :

$$\frac{7-1}{2}=3 \quad \text{et} \quad \frac{7+1}{2}=4,$$

donc on peut conclure, ces deux solutions étant différentes de 1 et 2 :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } \frac{6}{x-1}=\frac{x}{x-2} \text{ sont 3 et 4}}$$

(c) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}3x^2+x-1=x^2-1 &\iff 2x^2+x=0\\ &\iff x\,(2x+1)=0\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } 3x^2+x-1=x^2-1 \text{ sont 0 et } -\frac{1}{2}}$$

(d) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^{-x}-1=0 &\iff \mathrm{e}^x-\frac{6}{\mathrm{e}^x}-1=0\\ &\iff \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-6}{\mathrm{e}^x}=0\\ &\iff \left(\mathrm{e}^x\right)^2-\mathrm{e}^x-6=0\\ &\leftrightarrow \begin{cases} y=\mathrm{e}^x\\ y^2-y-6=0\end{cases}.\end{aligned}$$

De plus, l'équation y^2-y-6 est une équation du second degré dont le discriminant est égal à 25, donc admet deux solutions réelles exactement, qui sont -2 et 3. On en déduit :

$$\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^{-x}-1=0 \iff \mathrm{e}^x\in\{-2,3\},$$

ce qui nous permet de conclure, puisque la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $3=\mathrm{e}^{\ln(3)}$:

$$\boxed{\ln(3) \text{ est l'unique solution de l'équation } \mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^{-x}-1=0}$$

2. (a) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}(x+1)^2=(3x-1)^2 &\iff (x+1)^2-(3x-1)^2=0\\ &\iff 4x\,(-2x+2)=0\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } (x+1)^2=(3x-1)^2 \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$$

(b) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}(2x-1)^2+x\,(1-2x)=4x^2-1 &\iff (1-2x)^2+x\,(1-2x)+(1-4x^2)=0\\ &\iff (1-2x)^2+x\,(1-2x)+(1-2x)(1+2x)=0\\ &\iff (1-2x)(2+x)=0\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } (2x-1)^2+x\,(1-2x)=4x^2-1 \text{ sont } \frac{1}{2} \text{ et } -2}$$

(c) Les quotients $\dfrac{x-1}{x+1}$ et $\dfrac{3x+5}{5-7x}$ sont bien définis si et seulement si x est différent de -1 et de $\dfrac{5}{7}$. De plus, si x est différent de -1 et de $\dfrac{5}{7}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1}=\frac{3x+5}{5-7x} &\iff (x-1)(5-7x)=(3x+5)(x+1)\\ &\iff -7x^2+12x-5=3x^2+8x+5\\ &\iff 2\left(5x^2-2x+5\right)=0.\end{aligned}$$

Or le trinôme $5x^2-2x+5$ a un discriminant strictement négatif (égal à -96), donc il n'a pas de racine réelle, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } \frac{x-1}{x+1}=\frac{3x+5}{5-7x} \text{ n'a pas de solution réelle}}$$

(d) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}+1 &\iff \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}+1\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}=(\mathrm{e}+1)\,\mathrm{e}^x\\ &\iff \left(\mathrm{e}^x\right)^2-(\mathrm{e}+1)\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}=0\\ &\iff \begin{cases} y=\mathrm{e}^x\\ y^2-(\mathrm{e}+1)\,y+\mathrm{e}=0.\end{cases}\end{aligned}$$

De plus, l'équation $y^2-(\mathrm{e}+1)\,y+\mathrm{e}=0$ est une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta=(\mathrm{e}+1)^2-4\mathrm{e}=(\mathrm{e}-1)^2.$$

Ce discriminant est strictement positif, donc l'équation $y^2-(\mathrm{e}+1)\,y+\mathrm{e}=0$ admet exactement deux solutions, qui sont :

$$y_1=\frac{(\mathrm{e}+1)-(\mathrm{e}-1)}{2}=1 \quad \text{et} \quad y_2=\frac{(\mathrm{e}+1)+(\mathrm{e}-1)}{2}=\mathrm{e}.$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}+1 \iff \mathrm{e}^x\in\{1,\mathrm{e}\}$$

et finalement, comme la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\mathrm{e}^0=1$:

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } e^x + e^{1-x} = e + 1 \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$$

(e) $\ln(x^2-1)$ et $\ln(2x)$ existent si et seulement si x^2-1 et $2x$ sont strictement positifs donc si et seulement si x appartient à $]1,+\infty[$. De plus, on a, pour tout x appartenant à $]1,+\infty[$ et comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\ln(x^2-1) = \ln(2x) &\iff x^2 - 1 = 2x \\ &\iff x^2 - 2x - 1 = 0.\end{aligned}$$

De plus le trinôme du second degré x^2-2x-1 admet pour discriminant $\Delta = 8$, donc il admet exactement deux racines réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2},$$

donc on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, on peut remarquer que x_1 est strictement négatif, tandis que x_2 est strictement supérieur à 1, donc on peut conclure :

$$\boxed{1+\sqrt{2} \text{ est l'unique solution de l'équation } \ln(x^2-1) = \ln(2x)}$$

Correction de l'exercice 4-2

1. (a) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 > (3-x)(x+4) &\iff (x-3)^2 > -(x-3)(x+4) \\ &\iff (x-3)^2 + (x-3)(x+4) > 0 \\ &\iff (x-3)(2x+1) > 1\end{aligned}$$

Comme $(x-3)(2x+1)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont $-\dfrac{1}{2}$ et 3 et comme son coefficient dominant est strictement positif, on peut alors conclure :

$$\boxed{x^2 - 6x + 9 > (3-x)(x+4) \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]3,+\infty[}$$

(b) Le quotient $\dfrac{4-2x}{x+3}$ est défini si et seulement si x est différent de -3 et on peut directement faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4-2x}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On peut alors conclure :

$$\boxed{\frac{4-2x}{x+3} \iff x \in]-3,2[}$$

(c) Les quotients $\dfrac{2x+3}{x-1}$ et $\dfrac{4x}{2x-3}$ sont bien définis si et seulement si x est différent de 1 et de $\dfrac{3}{2}$ et, si x est un réel différent de 1 et de $\dfrac{3}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x-1} \geqslant \frac{4x}{2x-3} &\iff \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x-3} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x+3)(2x-3) - 4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \geqslant 0\end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$4x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4x-9}{(x-1)(2x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On peut alors conclure :

$$\boxed{\frac{2x+3}{x-1} \geqslant \frac{4x}{2x-3} \iff x \in \left]1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{4}, +\infty\right[}$$

(d) Pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{x^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{2} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x^2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$

et donc, la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x^2} - 2\mathrm{e}^x \geqslant 0 &\iff x^2 \geqslant x - \ln(2) \\ &\iff x^2 - x + \ln(2) \geqslant 0\end{aligned}$$

De plus, le trinôme $x^2 - x + \ln(2)$ admet pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 4\ln(2) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{16}\right)$$

Δ étant strictement négatif , on en déduit que $x^2 - x + \ln(2)$ est strictement positif pour tout réel x, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } \mathrm{e}^{x^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{2} \geqslant 0 \text{ est } \mathbb{R}}$$

2. (a) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}x^2 \leqslant 6x - 9 &\iff x^2 - 6x + 9 \leqslant 0 \\ &(x-3)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure (faut-il rappeler qu'un carré est toujours positif ou nul ?) :

$$\boxed{3 \text{ est l'unique solution de l'inéquation } x^2 \leqslant 6x - 9}$$

(b) Pour tout réel x, on a :

$$x^2 + 3x - 5 < x - 4 \iff x^2 + 2x - 1 < 0$$

De plus, l'équation du second degré $x^2 + 2x - 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 8$, donc elle admet deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } x^2 + 3x - 5 > x - 4 \text{ est } \left]-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right[}$$

(c) Pour tout réel x non nul (pour que le quotient ait un sens), on a :

$$\begin{aligned} 3x + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{5}{2} &\iff 3x + \frac{1}{2x} - \frac{5}{2} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x} \leqslant 0 \end{aligned}$$

De plus, l'équation du second degré $6x^2 - 5x + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 1$, donc elle admet deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{5 - 1}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + 1}{12} = \frac{1}{2}$$

ce qui nous permet de dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x^2 - 5x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{2x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } 3x + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{5}{2} \text{ est } \mathbb{R}_-^* \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]}$$

(d) ◇ L'équation du second degré $x^2 - x - 6 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est égal à 25, donc admet deux solutions réelles exactement, qui sont -2 et 3, donc le quotient $\dfrac{2}{x^2 - x - 6}$ est bien défini si et seulement si x est différent de -2 et de 3.
De même, l'équation du second degré $2 - 3x - 2x^2 = 0$ admet pour discriminant 25, donc admet deux solutions réelles exactement, qui sont $\dfrac{1}{2}$ et -2, donc le quotient $\dfrac{x}{2 - 3x - 2x^2}$ est bien défini si et seulement si x est différent de $\dfrac{1}{2}$ et de -2.

◇ Pour tout réel x différent de -2, $\dfrac{1}{2}$ et 3, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - x - 6} \geqslant \frac{x}{2 - 3x - 2x^2} &\iff \frac{2}{x^2 - x - 6} - \frac{x}{2 - 3x - 2x^2} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{2}{(x+2)(x-3)} - \frac{x}{(x+2)(1-2x)} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{2\,(1-2x) - x\,(x-3)}{(x+2)(x-3)(1-2x)} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{2 - x - x^2}{(x+2)(x-3)(1-2x)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On vérifie alors (quitte à calculer un discriminant), que les solutions de l'équation $2 - x - x^2 = 0$ sont 1 et -2, ce qui nous permet d'obtenir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$2-x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{2-x-x^2}{(x+2)(x-3)(1-2x)}$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On peut alors conclure :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2}{x^2-x-6} \geqslant \dfrac{x}{2-3x-2x^2}$ est :

$$\left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left]3, +\infty\right[$$

Sommaire