2 Sommes et produits finis

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

Dans cette partie, on considère un ensemble E, muni d'une addition et d'une multiplication associatives et commutatives, telles que la multiplication soit distributive sur l'addition. Dans un premier temps, on se limitera au cas où l'ensemble E est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, mais on verra plus tard que les notations et résultats de ce paragraphe sont encore valables dans d'autres cas, par exemple dans le cas de l'ensemble des nombres complexes ou de l'ensemble des polynômes.

A. Sommes finies

Notation 2.1

Si n et p sont deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et si $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ sont $n-p+1$ éléments de E, on note :

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n$$

Le « i » intervenant dans la somme est appelé indice de sommation.
On dit que l'indice de sommation est muet, c'est-à-dire que l'on a aussi :

$$\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{i=p}^{n} x_i = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n$$

Plus généralement, si I est une partie **finie** de $\mathbb{Z}$ et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, on note $\sum_{i\in I} x_i$ la somme de tous les éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Remarques

a. En général, on convient de noter $\sum_{i=p}^{n} x_i = 0$ si $p > n$.

b. Le plus souvent, l'indice de sommation sera un entier positif ou nul, mais il est possible qu'il soit négatif. Par exemple, on a :

$$\sum_{i=-2}^{4} i = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$$

Proposition 2.2 ► Opérations sur les sommes finies

i. Si n et p sont deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et si $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n+1}$ sont $n-p+2$ éléments de E, on a :

$$\sum_{i=p}^{n+1} x_i = \sum_{i=p}^{n} x_i + x_{n+1} = x_p + \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n + x_{n+1}$$

ii. Étant données une partie I de $\mathbb{Z}$ et deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, on a :

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$$

Remarque Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la commutativité et de l'associativité de l'addition dans E.

Théorème 2.3 ► Sommes de référence

i. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda = \underbrace{\lambda + \lambda + \cdots + \lambda}_{n \text{ termes}} = n\lambda.$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

iv. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2.$

Remarque À propos des égalités *iii* et *iv*, le programme stipule que « *[ces] formules* [...] seront vues en exercice ; elles ne sont pas exigibles » : il est donc important de savoir les démontrer. Cependant, comme elles sont utilisées dans un très grand nombre de situations, il nous a semblé préférable de les préciser ici.

Exercice 2.1 Démontrer le théorème 2.3.

Proposition 2.4 ► Changement d'indice

Soient I et J deux parties finies de $\mathbb{Z}$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Si σ est une application bijective de J sur I, alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\sigma(j)}$$

Remarques

a. En pratique, on se limitera le plus souvent à des changements d'indices affines de la forme $j := i+1$, $j := i-1$, ou plus généralement $j := i+a$ ou $j := a-i$, où a est un entier quelconque. Dans chacun de ces cas, il n'est pas nécessaire de mentionner la bijectivité, du moment que le changement d'indice est fait avec soin. En particulier, on a par exemple, si p et n sont des entiers et $(x_i)_{p\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E :

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{i=p+1}^{n+1} x_{i-1} = \sum_{i=p-1}^{n-1} x_{i+1}$$

b. Pour se familiariser avec le changement d'indice, on pourra dans un premier temps revenir à une écriture « en extension » (*i.e.* avec des « $\ldots$ ») de la somme, pour mieux visualiser les termes sommés.

Exercice 2.2 Si n désigne un entier naturel, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+2)^2$ à l'aide du changement d'indice $i := k+2$.

B. Produits finis, factorielles

B.1. Produits finis

Notation 2.5

Si n et p sont deux entiers relatifs tels que $p \leqslant n$ et si $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ sont $n-p+1$ éléments de E, on note :

$$\prod_{i=p}^{n} x_i = x_p \times x_{p+1} \times \cdots \times x_n$$

Le « i » intervenant dans la somme est appelé indice de sommation.
Plus généralement, si I est une partie **finie** de $\mathbb{Z}$ et si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E, on note $\prod_{i \in I} x_i$ le produit de tous les éléments de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Remarques

a. En général, on convient de noter $\prod_{i=p}^{n} x_i = 1$ si $p > n$.

b. Le lecteur remarquera que les résultats sur le changement d'indices, vus pour les sommes finies, sont encore valables dans le cas des produits finis.

B.2. Factorielles et combinaisons

Notation 2.6

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Si $n = 0$, on convient de noter : $0! = 1$.

Exemples 2.1

a. $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ et $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

b. Si n et p sont deux entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$\begin{aligned}(2n)(2n-2)\cdots(2p+2) &= \prod_{k=p+1}^{n}(2k) \\ &= 2^{n-p} \prod_{k=p+1}^{n} k \\ &= 2^{n-p}\,\frac{n!}{p!}\end{aligned}$$

En particulier, si $p = 0$, on a :

$$(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2 = 2^n\, n!$$

Notation 2.7

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on note :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Proposition 2.8

Si n et p sont deux entiers naturels quelconques, alors :

i. Si $0 \leqslant p \leqslant n$: $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

ii. Si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, alors : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$

Remarque Comme il y a souvent des doutes sur la deuxième formule, il est important de savoir la retrouver rapidement.

Exercice 2.3 Démontrer la proposition 2.8.

Proposition 2.9 ▶ Formule du triangle de Pascal

Si n et p sont deux entiers naturels quelconques, alors :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Exercice 2.4 Démontrer la formule du triangle de Pascal.

Théorème 2.10 ▶ Formule du binôme de Newton

Pour tout couple (a, b) de réels et pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Remarque En particulier, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exercice 2.5 Démontrer la formule du binôme de Newton (on pourra raisonner par récurrence sur n).

C. Sommes finies doubles

Notation 2.11

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls et si $(u_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'éléments de E, on note

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}$$

la somme de tous les éléments de la famille $(u_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Plus généralement, si I et J sont deux parties **finies** de $\mathbb{Z}$ et si $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille d'éléments de E, on note

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j}$$

la somme de tous les éléments de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

Théorème 2.12

[Inversion de l'ordre de sommation] Si I et J sont deux parties **finies** de $\mathbb{Z}$ et si $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille d'éléments de E, alors :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$$

En particulier, si n et p sont deux entiers naturels non nuls et si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont deux familles d'éléments de E, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i\, y_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} y_j\right)$$

Remarques

a. Ces résultats sont des conséquences immédiates des propriétés de l'addition et de la multiplication dans E.

b. Attention, lors de l'inversion de l'ordre de sommation, il peut y avoir une difficulté si les indices des ne sont pas indépendants (voir le deuxième des exemples suivants).

Exercice 2.6 n et p étant deux entiers naturels non nuls, calculer les sommes

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} ij \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$$

Proposition 2.13

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ des réels. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$

Preuve La première égalité est une conséquence immédiate des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication (commutativité, distributivité). Pour démontrer la seconde, on procède par récurrence en démontrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « pour toute famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i\, a_j \text{ »}$$

est vraie.

◇ Au rang $n = 2$. Pour tout couple (a_1, a_2) de réels, on a :

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1\, a_2 + a_2\, a_1$$

et :

$$\sum_{i=1}^{2} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2} a_i\, a_j = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1\, a_2 + a_2\, a_1$$

donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

◇ Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit alors $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ une famille de réels. On a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\, a_{n+1}\end{aligned}$$

et alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j + a_{n+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\, a_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, a_j}_{x_j} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i\, a_{n+1}}_{y}\end{aligned}$$

et finalement, en remarquant que y correspond au terme x_n (pour $j = n+1$ dans la somme) :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n+1} \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, a_j}_{x_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_i\, a_j\end{aligned}$$

soit finalement : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

□

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 2-1

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ »}$$

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

◇ *Initialisation.* Au rang $n = 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$

donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

◇ *Hérédité.* Soit n un élément *fixé* de $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on cherche à prouver que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On remarque pour cela que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

et donc, d'après $\mathscr{P}(n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Finalement, on a prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathscr{H}(n)$ la proposition :

$$\mathscr{H}(n) :\ \text{« } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ »}$$

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}(n)$ est vraie.

◇ *Initialisation.* Au rang $n = 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$$

donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie.

◇ *Hérédité.* Soit n un élément *fixé* de $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie et on cherche à prouver que $\mathscr{H}(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On remarque pour cela que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

et donc, d'après $\mathscr{P}(n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$$

et donc [1] :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ce qui prouve que : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

1. Si l'on n'avait pas pensé à utiliser le résultat à démontrer (ce qui est toujours une bonne idée !), on aurait aussi pu déterminer les racines du trinôme du second degré $2X^2 + 7X + 6$, par exemple en calculant son déterminant.

◇ Finalement, on a prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathscr{Q}(n)$ la proposition :

$$\mathscr{H}(n) :\ \text{« } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ »}$$

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie.

◇ *Initialisation.* Au rang $n = 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{et} \quad \left[\frac{1 \times (1+1)}{2}\right]^2 = 1$$

donc $\mathscr{Q}(1)$ est vraie.

◇ *Hérédité.* Soit n un élément *fixé* de $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie et on cherche à prouver que $\mathscr{Q}(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

On remarque pour cela que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

et donc, d'après $\mathscr{P}(n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2+4n+4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

ce qui prouve que : $\mathscr{Q}(n) \Rightarrow \mathscr{Q}(n+1)$.

◇ Finalement, on a prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

Correction de l'exercice 2-2

On effectue le changement d'indice $i := k+2$ (ou $k := i-2$), l'application $i \mapsto i-2$ étant bijective de $[\![2, n+2]\!]$ sur $[\![0, n]\!]$. On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k+2)^2 &= \sum_{i=2}^{n+2} i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+2} i^2 - 1^2\end{aligned}$$

et alors, d'après le résultat de l'exercice II-1 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+2)^2 &= \frac{(n+2)(n+3)\left[2\,(n+2)+1\right]}{6} - 1\\ &= \frac{(n^2+5n+6)(2n+5)-6}{6}\\ &= \frac{2n^3+15n^2+37n+24}{6}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+2)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+13n+24)}{6}}$$

Correction de l'exercice 2-3

i. Par définition, si $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!\,(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$

ii. Par définition, on a, si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Correction de l'exercice 2-4

Par définition, on a, si $0 \leqslant p \leqslant p+1 \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\\ &= \frac{n!\,[(n-p)+(p+1)]}{(p+1)!\,(n-p)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,((n+1)-(p+1))!}\\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

De plus, si $p > n$, on a :

$$\binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} = 0$$

donc on a encore :

$$\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Enfin, si $n = p$, on a :

$$\binom{n}{p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} = 1$$

donc on a encore une fois :

$$\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Correction de l'exercice 2-5

Soit (a, b) un couple de nombres réels. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \text{ »}$$

est vraie.

◇ Par convention, on a :

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k\, b^{0-k} = a^0\, b^0 = 1$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1}\end{aligned}$$

et donc, en faisant le changement d'indice $k := k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k\, b^{n+1-k} + b^{n+1} - \binom{n}{n+1} a^{n+1}\end{aligned}$$

et alors, d'après la formule du triangle de Pascal et en remarquant que $\binom{n}{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Finalement, on a prouvé : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et donc :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}}$$

Correction de l'exercice 2-6

► Les indices de la première somme étant indépendants, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \left(\sum_{j=1}^{p} j\right)$$

et donc, d'après le résultat de l'exercice II-1 :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} ij = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}}$$

► Les indices sont liées, donc on ne peut pas intervertir les symboles Σ sans réfléchir. On remarque donc que :

$$\begin{aligned}\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ /\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } i \leqslant j \leqslant n\} &= \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ /\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\} \\ &= \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ /\ 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j\}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)\end{aligned}$$

et alors, en effectuant le changement d'indice $j := j+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1} j\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right]\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} = \frac{n(n+3)}{4}}$$

Sommaire