



ECRICOME

Filière ECS

(Énoncé)

On pourra utiliser sans justification que : $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. On note : $\forall n \geq 1, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.

b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ appelé **constante d'Euler**.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

a) Justifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n)$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$