# EDHEC

## Filière ECE

## (Enoncé)

Trois personnes, notées $A, B$ et $C$ entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients $A$ et $B$ occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que $C$ attend que l'un de ces deux guichets se libère pour se faire servir. On suppose que :

- Les durées de passage au guichet des trois personnes $A, B$ et $C$ sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement $X, Y$ et $Z$, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
- La durée du changement de personne à un guichet est négligeable.

1. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que $U$ et $V$ sont des variables aléatoires.

   a) Montrer que la fonction de répartition $F_U$ de $U$ est définie par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   b) En déduire que $U$ est une variable aléatoire à densité et donner une densité $f_U$ de $U$.

   c) Déterminer l'espérance et la variance de $U$.

2. On note $T$ le temps total passé par $C$ dans l'agence bancaire.

   a) Exprimer $T$ en fonction de certaines des variables précédentes.

   b) En déduire $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3. On suppose avoir importé des bibliothèques dans un programme `Python` à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

   a) On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs de taille $n$, les commandes `m=np.fmin(a,b)` et `M=np.fmax(a,b)` renvoient les vecteurs $m$ et $M$, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout $i$ de $[\![0, n-1]\!]$, on ait : `m[i]=min(a[i],b[i])` et `M[i]=max(a[i],b[i])`.
   On rappelle également que `rd.random(n)` simule $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Compléter les commandes `Python` suivantes pour qu'elles permettent de simuler $n$ fois les variables aléatoires $U, V$ et $T$, pour $n$ entré par l'utilisateur :

```
n=int(input('entrez la valeur de n : '))
x=rd.random(n)
y=rd.random(n)
z=rd.random(n)
u=...........
v=...........
t=...........
print("u=",u,"v=",v,"t=",t)
```

b) Que représente l'événement $[T \geqslant V]$ ?

c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = \mathbb{P}(T \geqslant V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients $A, B$ et $C$ aux guichets.

Compléter les commandes `p=....... ; print("p=",p)` pour que, placées sous les commandes écrites à la question 3a), elles permettent d'obtenir une valeur approchée de $p$.

d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Python` est comprise entre 0.66 et 0.67.

Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de $p$ ?