EML

Filière ECS

(Enoncé)

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit u un élément de E.
   Montrer, pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$: $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 u(t)\,\mathrm{e}^{-xt} = 0$.
   En déduire que, pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   $$\forall x \in \,]0\,;\,+\infty[\,,\ L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$: $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ v_i(t) = t^i\,\mathrm{e}^{-at}$$
   Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, $L(v_i)(x)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ w_n(t) = t^n$$
   Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer :
   $$\forall x \in \,]0\,;\,+\infty[\,,\ L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**
   Soit u un élément de E. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :
   $$\forall t \in [A\,;\,+\infty[\,,\ |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0\,;\,A]\,,\ |u(t)| \leqslant M$$
   Établir : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |u(t)| \leqslant M + t^p$. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

   Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s$ converge.

   On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s$.

   a) Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

   b) Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ R'(t) = -u(t)$.

   c) En déduire : $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\ L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

   d) Soit $\varepsilon \in \left]0\,;\,+\infty\right[$. Justifier qu'il existe $B \in \left[0\,;\,+\infty\right[$ tel que :

   $$\forall t \in \left[B\,;\,+\infty\right[,\ |R(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   En déduire : $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\ |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x\displaystyle\int_0^B |R(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$.

   e) Conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$.

8. **Transformée de Laplace d'une dérivée**

   Soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

   a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \left[0\,;\,+\infty\right[$ tel que :

   $$\forall t \in \left[A\,;\,+\infty\right[,\ |u(t)| \leqslant |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}$$

   b) En déduire que u appartient à E.

   c) Établir : $\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\ L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. **Dérivée puis dérivée $n^{ème}$ d'une transformée de Laplace**

   Soit u un élément de E. On considère, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ u_n(t) = t^n\,u(t)$$

   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

   b) Montrer : $\forall a \in \mathbb{R},\ |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\,\mathrm{e}^{|a|}$.

   c) Soient $x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.

   Montrer : $\forall t \in \left[0\,;\,+\infty\right[,\ \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\,\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$.

   En déduire :

   $$\left|\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,|u(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$$

   d) Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ et exprimer $(L(u))'$ à l'aide de $L(u_1)$.

   e) Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(L(u))^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n)$.

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.

    a) Montrer que u appartient à E et :

    $$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x)$$

    b) En déduire :

    $$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ \left(x^2 + 5x + 6\right) L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x$$

    puis : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution du problème posé.