



EDHEC

Filière ECS

(Énoncé)

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a) Montrer que f est continue sur $] - \infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. a) Montrer que f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $] - \infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. a) Établir que, pour tout n de \mathbb{N}^* , il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.