EDHEC

Filière ECE

(Enoncé)

Partie I : Questions préliminaires

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

   c) Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

   d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n=j]\cap[X_{n+1}=k-j])$$

   b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n,+\infty[\![\,,\ \mathbb{P}(S_n=k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

   c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

   d) On rappelle que la commande `rd.geometric(p,n)` permet à `Python` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
   Compléter les commandes `Python` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
n=int(input("n="))
x=float(input("x="))
S=.........
print(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)}$$

4. a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

   On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = u_k$$

5. a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

   b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = -\dfrac{q\,(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}$.

6. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

   a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

   b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}$$

   En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}(Y = n) = -\frac{q^n}{n\,(1+q)^n\ln(p)}$$

   c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y = k) = 1$.

   d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

   e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Y) = -\dfrac{q\,[q+(1+q)\ln(p)]}{(\ln(p))^2}$.