EML

Filière ECS

(Enoncé)

On considère l'application $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0,1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue sur $[0,1[$.
   b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $]0,1[$
   c) Établir que $f'(t)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   d) Montrer, pour tout réel t de $[0,1[$: $\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0$.
   e) Dresser le tableau de variation de f. On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.
   f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f (on n'étudiera pas la dérivée seconde de f et on admettra que f est convexe).

2. a) Montrer que, pour tout réel x de $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (on distinguera les cas $x \in [0,1[$ et $x = 1$).
   On note $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0,1]$, par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Montrer que g est continue sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0,1[$.
   c) Établir que $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.
   d) Dresser le tableau de variation de g.
   e) Établir que g est convexe sur $[0,1[$.

3. a) Justifier que, pour tout réel t de $[0,1[$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} t^n$ converge.
   Quelle est sa somme ?
   On note, pour tout entier naturel n, $R_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0,1[,\ R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k$$

   b) Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0,1[$: $R_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, R_n est continue sur $[0,1[$.
   c) Établir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)}$$

e) Démontrer que, pour tout réel x de $[0,1[$, la série numérique $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}$$

4. a) Montrer que, pour tout réel x de $[0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n, $\rho_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0,1[,\ \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, ρ_n est continue sur $[0,1[$.

c) Établir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}$$

e) En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{\ln(1-x)}{n+2}$$

f) Conclure que, pour tout réel x de $[0,1[$: $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.