HEC

Filière B/L

(Enoncé)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On identifie tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Ker}(S)$ et $\mathrm{Im}(S)$ respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à S. De même, on identifie les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux éléments de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Partie 1

Soit A une matrice fixée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \Phi_A(M) = AM$$

1. a) Rappeler sans démonstration la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A.
   b) Vérifier que λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de Φ_A et déterminer les sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2.
   c) Justifier que l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable.
   d) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que le rang de $\Phi_A(M)$ est égal au rang de M.
3. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2 et A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.
   Montrer que la matrice $X\,{}^tX$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de Φ_A associé à λ.
   b) Réciproquement, montrer que si λ est valeur propre de Φ_A, alors λ est valeur propre de A.
   c) Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}\,(\Phi_A(M))$.
   d) Que peut-on en déduire concernant les rangs respectifs de M et $\Phi_A(M)$?

Partie 2

Soit $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de C, notée $\mathrm{Tr}(C)$, le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \quad \text{(somme des coefficients diagonaux de } C\text{)}$$

4. Soit h l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ h(M) = \mathrm{Tr}(M)$.
   a) Montrer que h est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(h)$ est égale à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$.
5. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Psi(M) = -M + \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{I}_n$.
   a) Montrer que -1 est valeur propre de Ψ et donner la dimension du sous-espace propre associé.
   b) Calculer $\Psi(\mathrm{I})$.
   c) Déduire des questions 5.a) et 5.b) que l'endomorphisme Ψ est diagonalisable.
   d) On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $\Psi(M)$ est égal au rang de M.
   e) On suppose que $n \geqslant 3$ et que le rang de M est égal à n.
   Montrer que le rang de $\Psi(M)$ est égal à n si et seulement si $\mathrm{Tr}(M)$ n'est pas valeur propre de M.