EDHEC

Filière ECS

(Enoncé)

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(\cdot\,|\,\cdot)$ défini par :

$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \forall u'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\ \left(u\,|\,u'\right)=xx'+yy'+zz'$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\|=\sqrt{(u\,|\,u)}$.
On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.
On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega=(a,b,c)$ et on suppose que c est non nul.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\varphi(u)=(yc-zb,za-xc,xb-ya)$$

1. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. a) Vérifier que ω appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   b) Montrer que $(\varphi(e_1),\varphi(e_2))$ est une famille libre.
   c) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(\omega)$.
3. a) Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $(\varphi(u)\,|\,\omega)=0$.
   b) En déduire que : $\mathrm{Im}(\varphi)=(\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp}$.
4. a) Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1,u_2) de $\mathrm{Ker}(\varphi)\times\mathrm{Im}(\varphi)$ tel que $u=u_1+u_2$.
   b) Montrer que $(u\,|\,\omega)=(u_1\,|\,\omega)$.
   c) En déduire que $u_1=\dfrac{(u\,|\,\omega)}{\|\omega\|^2}\,\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.
5. a) Montrer que $M^3=-\|\omega\|^2\,M$.
   b) En déduire que : $\forall v\in\mathrm{Im}(\varphi),\ (\varphi\circ\varphi)(v)=-\|\omega\|^2\,v$.
   c) Montrer finalement que : $\forall u\in\mathbb{R}^3,\ (\varphi\circ\varphi)(u)=-\|\omega\|^2\,u+(u\,|\,\omega)\,\omega$.