



ECRICOME

Filière ECE

(Énoncé)

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
- Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 , vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a$$

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U .
- Calculer les dérivées partielles premières de f .
- Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A. Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f .
- Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1) . Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2 f(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $M = \nabla^2 f(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MX_1 et MX_2 , et en déduire les valeurs propres de M .
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum? Un maximum?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum? Un maximum?