EDHEC 2020 – Voie S – Problème

Partie 1. Préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

a) Compléter le programme Python suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
import numpy as np
n=int(input("n="))
x=np.arange(1,n+1)
u=...............
print(u)
```

b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

2. Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

3. On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux respectifs a_n et b_n sont convergentes, de somme respectives $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} c_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} c_k$$

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

c) Soit x un réel élément de $[0,1[$. On suppose dans cette question que l'on a $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

(i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux respectifs a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

(ii) Compléter le programme Python suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input("n="))
x=float(input("x="))
u=np.arange(1,n+1)
v=np.arange(n-1,-1,-1)
a=...............
b=...............
c=...............
print(c)
```

(iii) Donner l'expression de c_n sous forme d'une somme.

Partie 2. Étude d'une fonction définie comme somme d'une série

Dans cette partie on désigne toujours par x un réel $[0,1[$.

4. a) Utiliser la troisième question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

5. a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\ln(u) \leqslant u$.

b) En déduire que la série de terme général $\ln(n)\,x^n$ est convergente.

6. On pose : $f(x) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\,x^n$.

a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1c que :

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

b) Montrer finalement l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

7. a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8. a) En remarquant que $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\ln(n))x^n$, montrer que l'on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{(1-x)^2} - x$.

b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite 0. Donner la valeur du nombre dérivée à droite en 0 de f.

c) On admet que f est continue sur $[0,1[$. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.