HEC

Filière BL

(Énoncé)

1. Question de cours : définition d'une densité de probabilité.
   Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient α et β deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^\alpha & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x^\beta} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 1 ? à droite en 1 ?
   b) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On discutera suivant les valeurs de α et β.
3. a) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α et β ?
   b) Quelle est sa valeur lorsqu'elle converge ?
4. a) À quelles conditions sur (α, β), la fonction f est-elle une densité de probabilité ? On suppose ces conditions vérifiées dans la suite de l'exercice.
   b) Soit X une variable aléatoire de densité f.
   La variable X admet-elle une espérance $\mathbb{E}(X)$? une variance $\mathbb{V}(X)$? Si oui, que valent $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$?
5. a) Peut-on trouver un segment $[0, x]$ (avec $0 \leqslant x \leqslant 1$) tel que $\mathbb{P}(X \in [0, x]) = \dfrac{1}{2}$? Peut-on trouver un segment $[1, y]$ (avec $1 \leqslant y$) tel que $\mathbb{P}(X \in [1, y]) = \dfrac{1}{2}$?
   b) On appelle médiane tout réel m tel que $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)$. Déterminer la (les) médiane(s) de X.