ESCP

Filière ECT

(Énoncé)

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, alors $X+Y$ est une variable aléatoire réelle. Dans cet exercice, on étudie deux versions d'un jeu, dont le but est d'obtenir un maximum de points.
Soit n un entier naturel pair noté $n = 2N$ avec N un entier supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une urne contenant n billes, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n.

Partie I. Première version

Dans ce premier jeu, le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On remet la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On définit alors une variable aléatoire Y qui vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut $X+Y$.
Par exemple si le joueur tire la bille numéro 4, remet cette bille dans l'urne, puis tire la bille numéro 3 , alors $X = 4, Y = 1$ et le nombre de points obtenus par le joueur vaut $X + Y = 5$.

1. a) Combien y a-t-il de numéros pairs dans l'urne lorsque $n = 2N$?
   b) Reconnaitre, en justifiant, les lois de X et Y. Donner leurs espérance et variance.
2. `Python`
   Compléter le programme suivant afin qu'il simule le nombre de points obtenus par le joueur à l'issue d'une partie du jeu.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
    n=2*N
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.randint(0,2)
    return ..........
```

3. Justifier que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X+Y$? Justifier votre réponse.
5. a) Justifier les égalités suivantes : $\mathbb{P}(X+Y=1) = \dfrac{1}{2n}$ et $\mathbb{P}(X+Y=n+1) = \dfrac{1}{2n}$.
   b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X+Y=k)$ en utilisant la formule des probabilités totales.
   c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X+Y=k) = 1$.
6. a) Que vaut $\mathbb{E}(X+Y)$? Interpréter le résultat obtenu.
   b) `Python`
   On définit le programme suivant :

```
def simulation(N):
    s=0
    for k in range(1000):
        s=s+jeu_1(N)
    return s/1000
```

On exécute `simulation(4)` et `Python` renvoie 4,939. Expliquer ce résultat.

Partie II. Seconde version

Dans ce second jeu, on ne remet pas la bille tirée au premier tirage dans l'urne. Le jeu devient donc : Le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On ne remet pas la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. La variable aléatoire Y vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut toujours $X + Y$.

1. a) Montrer que : $\mathbb{P}_{[X \text{ est paire}]}(Y = 1) = \dfrac{N}{2N-1}$ et que $\mathbb{P}_{[X \text{ est impaire}]}(Y = 1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.
   b) À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X \text{ est paire}], [X \text{ est impaire }])$, calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$
   c) En déduire la loi de Y.
2. a) Donner la valeur de $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ en justifiant votre réponse.
   b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On rappelle que le but du jeu est d'obtenir le plus de points possibles. Est-ce qu'une version du jeu est favorable en moyenne au joueur ?