www.stephanepreteseille.com
Pour le plaisir des maths

HEC

Maths approfondies

(Énoncé)

Dans tout l'exercice n désigne un entier non nul et S une matrice symétrique réelle à coefficients strictement positifs.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S rangées dans l'ordre décroissant i.e. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.
Pour toute valeur propre λ de S on note $E_\lambda(S)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et on pose

$$\rho = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}$$

L'objectif principal de l'exercice est d'établir que ρ est une valeur propre de S, que $E_\rho(S)$ est de dimension égale à 1 et est engendré par un vecteur propre à composantes toutes strictement positives.

1. Question de cours : réduction des endomorphismes symétriques.
2. Vérifier le résultat principal annoncé ci-dessus dans le cas particulier où $n = 2$ et :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   avec $(a, b) \in \left]0, +\infty\right[^2$.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne tel que ${}^tXX = 1$ (où ${}^tX$ désigne la transposée de X).
   a) Établir que : ${}^tXSX \leqslant \lambda_1$ et montrer l'équivalence : ${}^tXSX = \lambda_1 \Leftrightarrow X \in E_{\lambda_1}(S)$.
   b) On note $|X|$ le vecteur colonne dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de X. Montrer l'inégalité $\left|{}^tXSX\right| \leqslant {}^t|X|\, S\, |X|$ puis l'égalité $\rho = \lambda_1$.
4. Montrer que si V est un vecteur propre associé à la valeur propre ρ alors il en est de même de $|V|$ et que toutes ses composantes sont strictement positives.
5. Conclure.