ESSEC-HEC

B/L

(Enoncé)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot,\cdot \rangle$ On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Partie 1

Dans cette première partie seulement, on suppose que $n = 3$.
Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$. On pose :

$$u = (1,0,-1) \quad v = (-1,1,-1) \quad w = (1,2,1)$$

On not :

$$e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$$

On rappelle que (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. a) Montrer que (u,v) est une base orthogonale de F.
   b) Montrer que (w) est une base de $F^\perp$.
   c) Trouver des réels α, β et γ tels que $\mathcal{B} = (\alpha u, \beta v, \gamma w)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   d) Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit p_F la projection orthogonale sur F.
   a) Soit A la matrice représentative de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

   b) Écrire la matrice Δ représentative de p_F dans la base $\mathcal{B}$.
   c) Donner une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\Delta P^{-1}$.
   d) La matrice A est-elle inversible ?
   e) Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre.
4. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.
   Donner un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (non nul) tel que $\|p_F(x)\| = \|x\|$.
   En déduire l'existence et la valeur de :

$$\max\left\{\frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}$$

Partie 2

On revient au cas général avec $n \geqslant 2$ quelconque. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1.

5. Soit φ l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}^n$, associe $\varphi(x) = \langle x, v \rangle v$.
   a) Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   b) Montrer que φ est une projection et que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est la droite vectorielle engendrée par v.
   c) Montrer que φ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   d) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$.
   f) Établir l'existence et déterminer la valeur de :

$$\max \left\{ \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}$$

6. Soit s l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}^n$, associe $s(x) = 2\varphi(x) - x$.
   a) Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.
   b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Partie 3

Dans cette partie, H désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r telle que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

1. On note p_H la projection orthogonale sur H.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_H(x)\| \leqslant \|x\|$ et préciser les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a l'égalité.
   b) Établir l'existence et déterminer la valeur de :

$$\max \left\{ \frac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}$$

2. Soit p une projection sur H qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

   a) Soit $x \in (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$. Calculer $\langle x, p(x) - x \rangle$.
   b) Montrer que p est une projection orthogonale.

www.stephanepreteseille.com
Diffusion et reproduction interdites