# ECRICOME 2023

## Maths Approfondies

## Sujet 00 (Enoncé)

## Exercice 2

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, de même dimension $d$.
- On note $p_F$ le projecteur orthogonal sur $F$ et $p_G$ le projecteur orthogonal sur $G$.
- Soit $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_d)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_d)$ des bases orthonormées de $F$ et de $G$ respectivement. On note $B$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{ème}$ colonne est $B_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle$.

1. a) Vérifier que l'ensemble $G$ est stable par $p_G \circ p_F$, c'est-à-dire que : $\forall x \in G, (p_G \circ p_F)(x) \in G$.

   b) Montrer que l'application $\pi$ qui à tout élément $x$ de $G$ associe $(p_G \circ p_F)(x)$ est un endomorphisme de $G$.

   c) Que vaut $\pi$ si $F = G$ ?
   Que vaut $\pi$ si $F$ et $G$ sont orthogonaux ?

2. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, et que :
$$F = \{(x, y, z) \in E,\ x + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in E,\ y + z = 0\}$$

   a) Quelle est la valeur de $d$ dans ce cas-là ?

   b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{U}$ de $F$ dont le premier vecteur est $u_1 = (0, 0, 1)$, et une base orthonormée $\mathcal{V}$ de $G$ dont le premier vecteur est $v_1 = (1, 0, 0)$.

   c) En déduire une expression de ${}^tBB$.

   d) Déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$.

3. On revient au cas général dans cette question et les suivantes.

   a) Soit $x \in G$. Montrer que :
$$(p_G \circ p_F)(x) = \sum_{i=1}^{d} \left( \sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x \rangle \langle u_k, v_i \rangle \right) v_i$$

   b) En déduire que la matrice de $\pi$ dans la base $\mathcal{V}$ est ${}^tBB$, puis que $\pi$ est un endomorphisme symétrique de $G$.

   c) Montrer alors qu'il existe un unique $d$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, vérifiant, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d$ tel que la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}$ soit la matrice de $\pi$ dans une base orthonormée de $G$ que l'on note $\mathscr{C}$.

4. a) Établir que pour tout vecteur $x$ de $G$ :
$$\langle x, \pi(x) \rangle = \langle x, p_F(x) \rangle = \|p_F(x)\|^2$$

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $\pi$, et $x$ un vecteur propre associé.
Montrer que :

$$\lambda\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2$$

En déduire que $\lambda \in [0, 1]$.

5. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, il existe un unique $t_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $\lambda_k = \cos^2(t_k)$, où les réels $\lambda_k$ sont définis à la question 3c.
Angle$(F, G)$ désigne le $d$-uplet $(t_1, \dots, t_d)$ que l'on peut définir pour tout couple $(F, G)$ de sous-espaces vectoriels de $E$ de même dimension $d$.
6. Exemples.
   a) Montrer que Angle$(F, G) = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ si et seulement si $F$ et $G$ sont orthogonaux.
   b) Montrer que Angle$(F, G) = (0, \dots, 0)$ si et seulement si $F$ et $G$ sont égaux.
   c) Déterminer Angle$(F, G)$ si on reprend les hypothèses de la question 2.