ECRICOME 2023 • Sujet 0

Maths Approfondies

Exercice 3 (Enoncé)

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, et pour tout entier naturel r, on considère l'expérience aléatoire suivante.
Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires.
On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et on rajoute systématiquement r boules blanches avant de procéder au tirage suivant. On note dans tout le problème X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « Lors des n premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches ».

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(A_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$, puis calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(A_n)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $\mathbb{P}(X=0)=0$.
   Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers a, b et r et simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire puis renvoie la valeur de X obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers a, b et r, et une valeur de N, qui simule N réalisations de la variable aléatoire X et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r = 0$.
   Donner la loi de X.
   Montrer que X admet une espérance et une variance, que l'on exprimera en fonction de a et b.
8. On suppose dans cette question que $a = b = r = 1$.
   a) Donner la loi de X.
   b) Démontrer que X n'admet pas d'espérance.

Partie II : Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r = 1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2 .

9. On suppose de plus que $a = 1$.
   a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{b \cdot b!}{n(n+1)\cdots(n+b)} = \frac{b \cdot (n-1)! \cdot b!}{(n+b)!}$$
   b) On note (v_n) la suite définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+b-1)} = \frac{n!}{(n+b-1)!}$$
   Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{b \cdot b!}{b-1}\,(v_n - v_{n+1})$$
   c) En déduire que X admet une espérance, et que : $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{b-1}$. On admettra que pour tout entier naturel a non nul, X admet une espérance.
10. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1.
    On notera alors, et uniquement dans cette question, X_a la variable aléatoire X.
    Soit B_1 l'événement : « On obtient une boule blanche au premier tirage ».
    a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_a \mid B_1) = 1 + \mathbb{E}(X_{a+1})$.
    b) Déterminer $\mathbb{E}(X_a \mid \overline{B_1})$.
    c) Démontrer que :
    $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_a) = 1 + \frac{a}{a+b}\,\mathbb{E}(X_{a+1})$$
    puis que :
    $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_a) = \frac{a+b-1}{b-1}$$

Partie III : Retour au cas général

On revient au cas général où a, b et r sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que r est non nul.
On rappelle le résultat démontré dans la première partie :
$$\forall n \geqslant 1,\ -\ln(\mathbb{P}(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$$
Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = -\ln(\mathbb{P}(A_n)) - \dfrac{b}{r}\ln(n)$.

11. Démontrer que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
12. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
13. Démontrer que $\mathbb{P}(A_n)$ est équivalent à $\mathrm{e}^{-\ell} \times \frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
14. Démontrer que $n\,\mathbb{P}(X = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{r}\,\mathbb{P}(A_{n-1})$.
15. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X admette une espérance.