HEC-ESSEC 2022

Filière ECS

(Enoncé)

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un endomorphisme de E. Dans tout le problème :

- n est un supérieur ou égal à 2 ;
- E est un espace vectoriel de dimension n ;
- $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
- on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda\,\mathrm{id}_E$ où λ appartient à $\mathbb{R}$ et id_E est l'application identique (ou identité) de E ;
- un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.
  On note alors $u_{|F}$, l'endomorphisme de F défini par : $u_{|F} : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$.
  Cet endomorphisme est appelé endomorphisme de F induit par u ;
- si u est un endomorphisme de E, on définit les puissances de u par récurrence :
  $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u^k = u \circ u^{k-1}$;
- si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :
  $$E_u(e) = \mathrm{vect}\Big(u^k(e) \mid k \in [\![1, n-1]\!]\Big) = \mathrm{vect}\big(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e)\big)$$
  Si k est un entier naturel non nul, $\mathscr{B}(e,k)$ désigne la famille $\big(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{k-1}(e)\big)$;
- soit $u \in \mathscr{L}(E)$; on dit que u est un **endomorphisme cyclique** s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on considérera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique ;
- soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est une **matrice de Frobenius** ou une **matrice compagnon** s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :
  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
  Le polynôme P_A tel que $P_A(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ est appelé polynôme caractéristique de A ;
- on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier naturel non nul k tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\big\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\big\}$ est appelé indice de nilpotence de u.

Le problème comporte trois parties.
Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques puis on traite quelques exemples, en particulier avec Python.
Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents.
Dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme appelée décomposition de Frobenius et on en déduit quelques propriétés élémentaires ; on montre en particulier que toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée.

Partie I - Premières propriétés

Soit u un endomorphisme de E et e un vecteur non nul de E.

A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. Justifier que la famille $\mathscr{B}(e, n+1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathscr{B}(e,k) \text{ est libre}\}$; justifier l'existence de $d(e)$.
3. Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + a_2 u^2(e) + \cdots + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

   Montrer alors que, pour tout entier k supérieur ou égal à $d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{d(e)-1}(e)\right)$.
   En déduire que $\mathscr{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.
4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u.
   Montrer également que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par l'endomorphisme u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $d(e)$, le vecteur e est-il un vecteur propre de u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tout vecteur non nul e de E, on a $d(e) = 1$.
7. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul de E tel que $d(e) = n$.

B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose dans cette que u est un endomorphisme cyclique de E et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$ de E ; vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ son polynôme caractéristique.
   Que vaut $(P_A(u))(e)$?
   Calculer $(P_A(u))\left(u^k(e)\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u.
10. Vérifier que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A et vérifier que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable.

C - Un premier exemple

On suppose dans cette que $E=\mathbb{R}^3$ et on note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de E.
On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}_3$ sont respectivement

$$F=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad G=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

14. Justifier que f est diagonalisable. On notera λ_1,λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
15. Déterminer (V_1,V_2,V_3) une base de diagonalisation de f telle que pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, $f(V_i)=\lambda_iV_i$ et telle que la première coordonnée du vecteur V_i dans la base $\mathscr{B}_3$ soit 1.
16. On pose $V=V_1+V_2+V_3$; déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.
    L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1,V_2,V_3) est une base de vecteurs propres de g.

D - Avec Python

Dans cette section, on suppose que les polynômes sont à coefficients réels.
On pourra utiliser les quelques notions de Python données ci-dessous, supposant l'ajout de la ligne de commande

```
import numpy as np
```

au début du programme :

- si `x` est un vecteur ligne, la commande `x[i:j+1]` renvoie un vecteur dont les coefficients sont `x[i], ...,x[j]` ;
- on suppose exécutée la commande `import numpy as np`;
- on crée un polynôme `P` en créant un tableau contenant ses coefficients à l'aide de la fonction `np.poly1d`;
  par exemple, le polynôme $P:x\mapsto x^3-3x+2$ est défini par `P=np.poly1d([1,0,-3,2])` ;
- le degré d'un polynôme P dont les coefficients sont stockés dans la variable `P` (comme précisé ci-dessus) est obtenu à l'aide de la commande `P.order` ;
- pour évaluer un polynôme `P` défini comme ci-dessus en une valeur `x`, on utilise la commande `P(x)` ;
- on peut effectuer des tests de comparaison avec `==`, `!=`, `>=`, et `<=`; par exemple, si `x` est une variable de type numérique, l'instruction `x>=0` renvoie `True` (ou vrai) si `x` est positif ou nul et `False` (ou faux) si `x` est strictement négatif ;
- les fonctions `np.max`, `np.sum`, `np.abs` permettent de calculer respectivement le maximum, la somme et la valeur absolue des éléments d'un vecteur (`np.abs(A)` renvoie un vecteur de même format que `A` dont les coefficients sont les valeurs absolues de ceux de `A`).

Dans cette section, on propose une méthode approximative permettant de tester si un polynôme réel de degré n admet exactement n racines réelles distinctes.
L'idée de la méthode est de partir d'un réel en deçà duquel on est sûr que le polynôme ne s'annule pas. Par un parcours de gauche à droite, on va tester le signe du polynôme et si l'on rencontre n changement de signes, on saura que le polynôme admet n racines réelles. Dans le cas contraire, on renverra une valeur d'indétermination.

19. Justifier que si un polynôme P de degré n est tel qu'il existe $n+1$ réels $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$ tels que :

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}\quad\text{et}\quad\forall k\in[\![1,n]\!]\,,\ P(x_k)P(x_{k+1})<0$$

    alors P admet n racines distinctes.

20. Montrer que si $P : x \mapsto x^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ est un polynôme et si z est un réel tel que $P(z) = 0$, alors :

$$|z| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$$

On pourra montrer que si $|z| > 1$, alors $|z| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

Dans la suite, on notera m le réel $\max\left(1, \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

21. Compléter la fonction Python `racSimpApprox` suivante qui, appliquée au vecteur ligne `c` contenant les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ du polynôme $P : x \mapsto x^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ et au réel `pas`, renvoie `True` si cette fonction Scilab détecte n changements de signe en partant de `-m-pas/2` et en testant les valeurs de `pas` en `pas` jusqu'à dépasser `m+pas/2`.
Dans le cas où l'on ne rencontre pas n changements de signe, la fonction renverra la chaîne de caractères `ind`.

```
def racSimpApprox(c,pas):
    P=np.poly1d(c)
    m=.........
    x=np.arange(-m,m+pas,pas)
    y=.........
    d=len(y)   #d contient le nombre de coefficients de y
    Signes=y[0:d-1]*y[1:d]
    if sum(Signes<0)==.........:
        return True
    else:
        return"ind"
```

22. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ?
Expliquer dans quel(s) cas la fonction renvoie la valeur indéterminée `ind`.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

23. En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u, établir que :

$$(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \operatorname{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \operatorname{id}_E) = 0$$

24. En déduire que la famille $\left(\operatorname{id}_E, u, u^2, \dots, u^p\right)$ est liée dans $\mathscr{L}(E)$.

25. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?
On suppose jusqu'à la fin de cette que $p = n$, et on note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

26. Soit $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Montrer que la famille $\mathscr{B}(e, n)$ est libre et conclure que u est cyclique.

27. On reprend dans cette question seulement l'exemple de la C de la partie I et, pour tout réel α, on note $u_\alpha = g + \alpha f$.
Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, suivant les valeurs de α, les cas où u_α est cyclique.

B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence r.

28. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$; montrer que la famille $\big(e, u(e), \ldots, u^{r-1}(e)\big)$ est libre dans E.
29. En déduire que $r \leqslant n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique.
    Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e, n)$.

C - Un second exemple

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$ de E et on rappelle que $\big(X^k\big)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ constitue une base de E.

30. Soit $P \in E$; montrer que pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ appartient à E.

On note $u : P \in E \mapsto u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

31. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
32. Soit $P \in E$; à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$$
    où P' désigne la dérivée de P.
33. En déduire que pour tout $P \in E$, $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$ où, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.
34. Soit $P \in E$; à l'aide d'un changement de variable, montrer que :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$$
35. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
    Montrer alors que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(u(P))' = u(P) - P$.
    En déduire que $(u(P))' = u(P')$.
36. Déterminer la matrice de u dans la base $\big(X^k\big)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ de E et en déduire le spectre de u.
37. On pose $v = u - \mathrm{id}_E$; montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E, constitué des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n-2$.
38. Montrer que v est nilpotent.
    L'endomorphisme v est-il cyclique ?

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

On se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathscr{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathscr{R})$:

$(\mathscr{R})$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe } p \in [\![1, n]\!] \text{ et } F_1, F_2, \ldots, F_p \text{ des sous-espaces vectoriels non nuls de } E,\\ \text{stables par } u, \text{ tels que } E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p \text{ et vérifiant :}\\ \qquad \text{pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ u_{|F_i} \text{ est un endomorphisme cyclique de } F_i.\end{array}}$$

A - Cas d'une homothétie

39. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si u est une homothétie.

B - Cas où u n'est pas une homothétie

40. Justifier qu'il existe e vecteur non nul de E tel que $d(e) \neq 1$.

    Pour le reste de cette section, on choisit un vecteur non nul e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geqslant 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$.

    On note toujours $\mathscr{B}(e, d) = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1})$ ainsi que $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ les scalaires tels que :

$$u^d(e) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e)$$

    Enfin, on note $F_1 = E_u(e)$.

41. Justifier que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si $d = n$.

    Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geqslant 3$).

    On complète la famille $\mathscr{B}(e, d)$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}, e_d, \ldots, e_{n-1})$ de E.

42. Démontrer que l'application $\varphi : x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in E \mapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E.

    On considère l'application $\Phi : x \in E \mapsto \big(\varphi(u^{d-1}(x)), \varphi(u^{d-2}(x)), \ldots, \varphi(u(x)), \varphi(x)\big) \in \mathbb{R}^d$.

43. Vérifier que Φ est linéaire.

    On note $G = \mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\widetilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.

44. Calculer $\Phi(e_0) = \Phi(e)$ et $\Phi(e_1) = \Phi(u(e))$.

    Plus généralement, justifier que pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe une famille de réels $(\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k})$ telle que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \ldots, 0)$.

45. Écrire alors la matrice de l'application $\widetilde{\Phi}$ dans les bases $\mathscr{B}(e, d)$ de F_1 et la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et justifier que $\widetilde{\Phi}$ est bijectif.

46. Montrer alors que $E = F_1 \oplus G$ et justifier que G est stable par u.

47. Dire pourquoi $u_{|F_1}$ est bien un endomorphisme cyclique de F_1.

48. Justifier que pour tout vecteur non nul e' de G, $d(e') \leqslant d$.

49. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée.

C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

50. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

    Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathscr{B}_{F_k}$ une base de F_k.

    Soit $\mathscr{B}$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_{F_1}, \mathscr{B}_{F_2}, \ldots, \mathscr{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathscr{B}$ est une base de E.

    Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?

    Dans la suite de cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

51. Montrer, à l'aide de la propriété $(\mathscr{R})$, qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de u est triangulaire inférieure et telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0, 1\}$, et tous les autres coefficients de T sont nuls.

D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

Dans cette section, $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_n$ est M.
On se propose de montrer que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$:

$(\mathscr{S})$	Il existe deux matrices symétriques V et W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible telles que $M = VW$.

52. *Cas où u est cyclique.* Il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on note toujours $\mathscr{B}(e,n)$ la base $\big(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{n-1}(e)\big)$ de E et $A = M_{\mathscr{B}(e,n)}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$: il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \iddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \iddots & \iddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}(e,n)$.
On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \qquad f(u(e)) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!]\,,\ f(u^j(e)) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f(u^{n-1}(e)) = e$.
Calculer $u(f(e))$, $u(f(u(e)))$ et plus généralement, pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $u(f(u^j(e)))$ et enfin $u(f(u^{n-1}(e)))$.

En déduire que :

$$AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera S_1 cette matrice AS.

53. Justifier que S est inversible ; on note $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

54. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_n$ vers la base $\mathscr{B}(e, n)$; vérifier que :

$$M = PS_1 \left({}^tP\right)\left({}^tP\right)^{-1} S_2 P^{-1}$$

et conclure que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$.

55. Montrer alors que ${}^tM$ et M sont semblables ; plus précisément, déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.

56. *Cas général.* En s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathscr{R})$, montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.