EDHEC 2022

Voie E

Exercice 3 (Enoncé)

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on considère la fonction f_n définie, pour tout réel x de $[0,1]$, par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n\,(x+n)}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ (on prononce gamma) sa limite.

   b) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

   c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. a) Déterminer les deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$$

   puis montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on pose : $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

   b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$$

   En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   c) Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n.

7. a) En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}?

   b) Déterminer $T_n - S_n$, puis compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
import numpy as np
n=1
s=1
while ..........:
    n=..........
    s=s+......
print(.........)
```