ECRICOME 2021

Filière ECE

Exercice 1 (Enoncé)

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et O_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M\,(M + \mathrm{I}_3)\,(M + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{O}_3$$

Partie A : Exemple de matrices appartenant à $\mathcal{A}$

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que : $\alpha\,\mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.
   b) En déduire deux valeurs propres de B.
   Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   c) Démontrer que B est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
   d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable dont le spectre est inclus dans $\{0, -1, -2\}$. Démontrer : $M \in \mathcal{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{A}$. On note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
   Justifier que M est diagonalisable.
7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
   Justifier que M et $M + 2\,\mathrm{I}_3$ sont inversibles, puis démontrer : $M = -\mathrm{I}_3$.
   b) Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$?
8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
   Justifier que les matrices M, $M + \mathrm{I}_3$ et $M + 2\,\mathrm{I}_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.
9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
   On traite ici le cas où $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
   On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable ; on suppose donc que M ne l'est pas.

a) Montrer que :
$$(M + \mathrm{I}_3)(M + 2\,\mathrm{I}_3) = (M + 2\,\mathrm{I}_3)(M + \mathrm{I}_3) = \mathrm{O}_3$$

b) En utilisant le fait que M n'est pas diagonalisable, déterminer la dimension de ses sous-espaces propres.

c) Soit U un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1 et V un vecteur propre de M associé à la valeur propre -2.

(i) Justifier que (U, V) forme une famille libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) Soit W un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(U, V)$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(iii) En utilisant le fait que $(M + \mathrm{I}_3)\,(M + 2\,\mathrm{I}_3)\,W = 0$ et $(M + 2\,\mathrm{I}_3)\,(M + \mathrm{I}_3)\,W = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :
$$MW + 2W = \alpha\, U \qquad \text{et} \qquad MW + W = \beta\, V$$
En déduire que W est une combinaison linéaire de U et V, et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour tout matrice M de E :
$$M \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$$