



EML

Filière ECE

(Énoncé)

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.
- b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?
2. Justifier que la matrice $M(0, 0)$ est diagonalisable.
3. Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.
 - a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A .
 - b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
 - c) Prouver alors que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.
 - a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
 - b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B et préciser la dimension des sous-espaces propres associés.
 - c) La matrice B est-elle diagonalisable ?
5. Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est $M(a, b)$. On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.
- b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}' .

- d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ si et seulement si $z = t = 0$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ .

- e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T . En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.
- f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable?
- g) Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable} \iff a^2 + 10ab + b^2 > 0$$