EML 2020

Voie E

Exercice 2 (Enoncé)

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \left\{M(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   Déterminer une base de E et sa dimension.

   b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

   a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

   b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

   c) Prouver alors que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

   a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\mathrm{I}_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

   b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B et préciser la dimension des sous-espaces propres associés.

   c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$. On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

   b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

   d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   Montrer que X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ si et seulement si $z = t = 0$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable} \iff a^2 + 10\, ab + b^2 > 0$$