EDHEC

Filière ECE

Problème (Enoncé)

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer I_0 et I_1.
3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

   b) En déduire I_2.

   c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```python
import numpy as np
n=int(input("n="))
b=np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1):
    aux=a
    a=.........
    b=.........
print(b)
```

4. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$$

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.

   b) En déduire la valeur de J_1.
7. En utilisant les questions 5 et 6, compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```python
import numpy as np
n=int(input("n="))
J=np.log(2)
for k in range(1,n):
    J=.........
I=.............
print(I)
```

8. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left[\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]$$

9. a) Utiliser les questions 4 et 5 pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

   b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   c) Utiliser la question 5 pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

    a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

    b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

    a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

    $$u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$$

    b) En déduire l'égalité suivante :

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1-(-1)^n}{2}$$

    c) Montrer alors que :

    $$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

    Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).$

    b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2.$

    c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).$