ESCP

Filière ECS

(Énoncé)

Les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dans une urne sont placées deux boules, une noire N et une rouge R. On effectue une suite de tirages d'une boule au hasard selon les modalités suivantes :

- si la boule tirée est noire : on ne la remet pas dans l'urne (et la boule rouge sera nécessairement tirée au prochain tirage),
- si la boule tirée est rouge : on remet l'urne dans l'état initial, avec 2 boules, la noire et la rouge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : N_n (respectivement R_n) l'événement : « la n-ième boule tirée est noire (respectivement rouge) ».

1. Écrire un script `Python` qui modélise le tirage des r premières boules obtenues ($r \geqslant 1$).
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \mathbb{P}(N_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(R_n)$.
   a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   b) En déduire que $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}\, b_{n+1} + \dfrac{1}{2}\, b_n$ ainsi que les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
3. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule noire tirée.
   Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.
4. Soit n un entier donné supérieur ou égal à 1. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées lors des n tirages consécutifs.
   a) Calculer l'intervalle $[\![m_n, M_n]\!]$ des valeurs prises par Z.
   Calculer ensuite $\mathbb{P}(Z = m_n)$ et $\mathbb{P}(Z = M_n)$.
   b) On note $b_{n,k}$ le nombre de tirages de n boules dont exactement k sont noires et se terminent par le tirage d'une boule rouge (l'événement R_n est réalisé). Exprimer successivement la probabilité $\mathbb{P}(R_n \cap [Z = k])$ puis la probabilité $\mathbb{P}(R_n)$ en fonction des $b_{n,k}$.