EML 2019

Filière ECS

(Enoncé)

Le sujet est composé d'un unique problème formé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.
La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*
Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.
Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et séries. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*

PARTIE A : Étude d'un endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynômiales) à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n. On convient de noter, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et et $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi_a(P)(x) = 2P(x) + (x-a)\,P'(x)$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le polynôme Q_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_k(x) = (x-a)^k$$

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. a) Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
   d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.
4. a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, exprimer la dérivée de la fonction $x \mapsto (x-a)^2 P(x)$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
   b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.
   c) Prouver alors que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
   d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Justifier que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0, x]$ tels que :

   $$f(\alpha_x) \int_0^x t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x) \int_0^x t\,\mathrm{d}t$$

   c) En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

   d) Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et que l'on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x}\left[f(x) - 2\,\Phi(f)(x)\right]$$

7. a) Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

   b) Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On **admet** le résultat suivant :

   $$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = 0$$

   a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \mapsto f(x) - \ell$, montrer :

   $$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}$$

   b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \mapsto f(-x)$, montrer :

   $$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{-\infty} \big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}$$

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.
On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
On pose $G = 2\,\Phi(F)$; ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tF(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\[2ex] F(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$$

10. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de x, $F(x)$ et $G(x)$.
11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Montrer que h_1 est une densité de probabilité.
Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

b) Montrer que X_1 admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X_1)$, et que l'on a : $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\,\Phi(H_1)$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'après la fonction 11, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherche pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ converge. Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie **dans cette partie sur** $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\[2ex] f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

13. a) Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leqslant \frac{1}{2}\big(x^2 + y^2\big)$.

b) En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
On considère l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2, \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

15. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire de E_2.
On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2. On note, comme dans la partie B, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer les limites de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^3}$ en 0.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0,\ \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \times \frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^X \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

d) En déduire : $\forall X > 0,\ \left(\displaystyle\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\displaystyle\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$

e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leqslant \dfrac{2}{3}\,\|f\|$.

f) En utilisant la relation de la question 16b, justifier que la limite de $X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g) En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \dfrac{2}{3}\,\langle\Phi(f), f\rangle$.

PARTIE E : Étude d'une suite

Dans cette partie, ***indépendante des précédentes,*** *on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

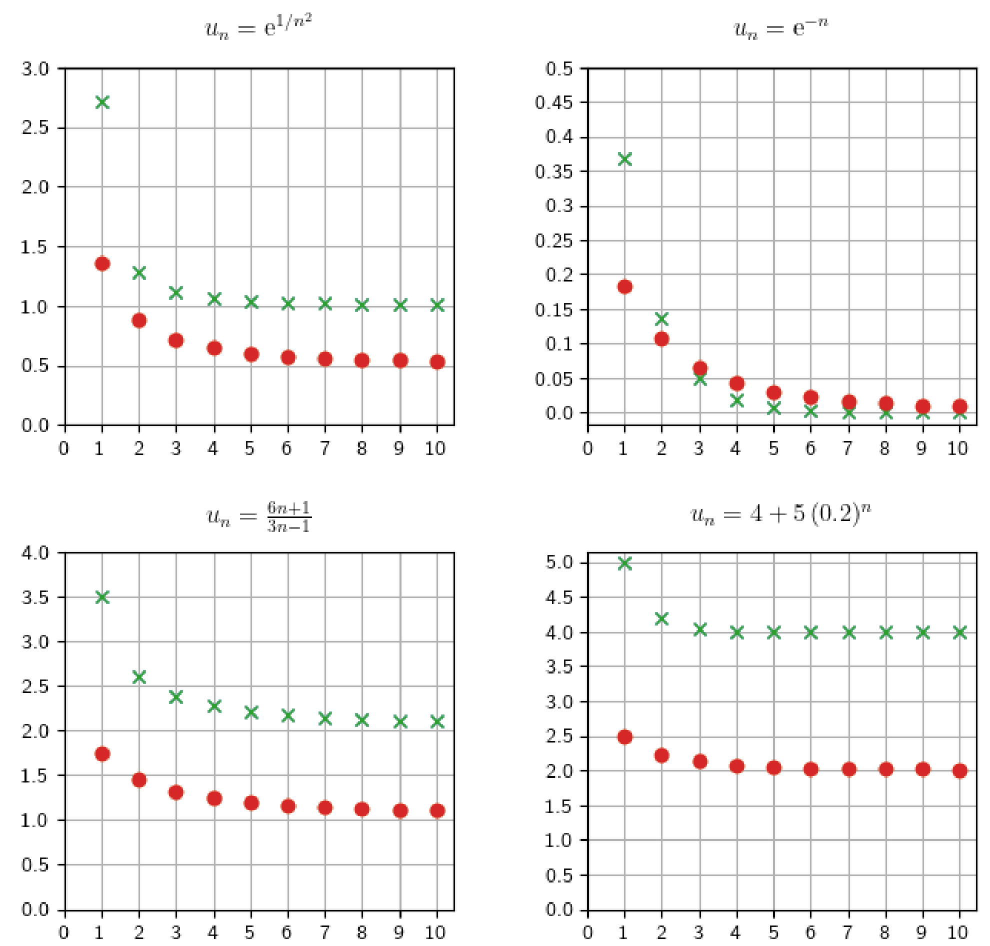
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k$$

17. On suppose que l'on dispose d'une fonction en langage Python d'en-tête `def u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
Écrire une fonction Python d'en-tête `def v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n en utilisant la fonction `u` précédente.

18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on a représenté ci-dessous, en utilisant les fonctions u et v, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\times$ et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\oplus$. À la vue des graphes obtenus, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \frac{u_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)}\,v_n + \frac{3n+1}{4\,(2n+1)}\,u_{n+1}$$

d) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+2)\,v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}\,(u_{n+1} - 2v_{n+1})$$

e) Démontrer toutes les conjectures faites à la question 18b.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c) Montrer ensuite que Nv_N tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

d) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}(Y = k)$$

b) On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(Z = n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}$$

La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?