EDHEC 2015

Voie S

Exercice 1 (Enoncé)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\,(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :
$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$
   b) En déduire la valeur de I_1.
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2\,(n-1)}.$$
   b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\,(x+1)^2}$.
   a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   b) Calculer J_0.
6. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.
   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4\,(n-1)}$. Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
   d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes `Python` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input(’entrez n : ’))
I=np.log(2)
J=1/2
J=.........
for k in range(2,n+1):
    I=.........
    J=.........
print(’la valeur de I est ’,I)
print(’la valeur de J est ’,J)
```