ECRICOME 2019

Filière ECE

Exercice 3 (Enoncé)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
3. a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^A f(u)\,\mathrm{d}u$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.
   a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
   c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
   a) Donner la fonction de répartition de Y et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
   b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
   Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.
   a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.
   b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.
   c) Montrer que pour tout réel x, on a :
   $$\mathbb{P}(T \leqslant x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(Y \geqslant -x)$$
   d) En déduire la fonction de répartition de T.
7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par :
   $$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$$
   a) Rappeler la fonction de répartition de U.
   b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.
8. On suppose qu'un programme `Python` commence par les instructions suivantes :

```
import numpy.random as rd
import numpy.rd
```

   a) Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête `def D(n)`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.
   b) On considère le script suivant :

```
n=int(input("n="))
a=D(n)
b=rd.random(n)
c=a/np.sqrt(1-b)
print(np.sum(c)/n)
```

   De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.