# HEC 2018

## Voie E

## Exercice (Enoncé)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n$ et $\theta$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
On définit la suite d'endomorphismes $(f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ en posant $f^0 = \mathrm{id}$ et :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$$

On suppose que $f^n$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $M$ la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer le spectre de $M$. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

   b) Préciser le rang des matrices $M$ et $M^2$ respectivement.

   c) Quels sont les polynômes annulateurs de $M$ dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note $F_j$ l'image de l'endomorphisme $f^j$ et $r_j$ son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

   Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note $g_j$ la restriction de $f$ à $F_j$, c'est-à-dire l'application linéaire de $F_j$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$$

   a) Calculer $r_0$ et $r_n$.

   b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

      $(i)$ Déterminer le rang de $g_j$.

      $(ii)$ Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

   c) Établir les inégalités :

$$n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$$

3. On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini $H$, noté $\mathrm{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des $k$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i x_i = k$, c'est-à-dire :

$$P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k,\ x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k = k\}$$

   On pose $p(k) = \mathrm{Card}(P(k))$. Enfin, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$y_i = \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!]\,,\ r_j - r_{j+1} = i\}\right)$$

a) Montrer que $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est un élément de $P(n)$.

b) Dans cette question, on suppose que $n$ est égal à 4.

  ($i$) Déterminer $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ lorsque $f$ est l'endomorphisme de matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

  ($ii$) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

  ($iii$) Montrer que, pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \, , \; x_i = \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \, , \; r_j - r_{j+1} = i\}\right)$$

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k), \; x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant \ell\}$$

et $q(\ell, k) = \mathrm{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  ($i$) Déterminer l'ensemble $Q(1, k)$.

  ($ii$) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

b) Pour tout couple $(\ell, k)$ d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \mathrm{Card}\left(\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k), \; x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \ell\}\right)$$

c) Soit $\ell$ un entier supérieur ou égal à 2.

  ($i$) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

  ($ii$) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$ ?

5. La fonction `Python` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne $\ell$ et de la colonne $k$ est égal à $q(l, k)$.

```
1  import numpy as np
2  def qmatrix(n):
3      q=np.ones([n,n])
4      for L in range(1,n):
5          for K in range(1,n):
6              if K<L:
7                  q[L,K]=.................
8              elif K==L:
9                  q[L,K]=.................
10             else:
11                 q[L,K]=q[L-1,K]+q[L,K-L-1]
12     return q
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
array([[ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.,   1.,   1.,   1.,   1.],
       [ 1.,  2.,  2.,  3.,  3.,   4.,   4.,   5.,   5.],
       [ 1.,  2.,  3.,  4.,  5.,   7.,   8.,  10.,  12.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  6.,   9.,  11.,  15.,  18.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  7.,  10.,  13.,  18.,  23.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  7.,  11.,  14.,  20.,  26.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  7.,  11.,  15.,  21.,  28.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  7.,  11.,  15.,  22.,  29.],
       [ 1.,  2.,  3.,  5.,  7.,  11.,  15.,  22.,  30.]])
```

a) Compléter les lignes (7) et (9) du script de la fonction `qmatrix`.

b) Donner un script `Python` permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de $n$ entrée au clavier.

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.