ESSEC

Filière B/L

Problème (Enoncé)

La première partie de ce problème détermine quelques propriétés des matrices d'Ehrenfest.
La seconde partie étudie un modèle de diffusion de particules à travers une membrane poreuse.
Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On désigne par A_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n+1$, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A_n est :

$$\begin{cases} n-i+1 & \text{si } j = i+1 \\ i-1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on pose $A'_n = \dfrac{1}{n} A_n$ et $B_n = {}^tA_n$ où ${}^tA_n$ désigne la matrice transposée de A_n.
Par commodité, on confondra matrice colonne à k lignes et vecteur de $\mathbb{R}^k$.

Partie I - Matrice d'Ehrenfest

1. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et espaces propres) de la matrice B_2. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer B_2^p pour p entier naturel.
3. En utilisant B_2, justifier que A_2 est diagonalisable et donner ses éléments propres.

   On va généraliser les résultats obtenus pour $n = 2$ en ce qui concerne les éléments propres de B_n.

   Pour x réel, on pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$.

   On admet les résultats suivants, concernant les fonctions ch et sh :

   - pour tout réel x, $\exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$
   - pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
   - les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

   Pour p entier naturel avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et x réel, on pose $f_p(x) = \mathrm{sh}^p(x)\,\mathrm{ch}^{n-p}(x)$ et on désigne par F_n le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même, engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

   Pour p entier relatif, on définit la fonction e_p sur $\mathbb{R}$ par $e_p(x) = \exp(px)$.
4. Montrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de F_n.

5. Soit k un entier vérifiant $0 \leqslant 2k \leqslant n$.
   a) En remarquant que pour x réel, $\exp((n-2k)x) = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^{n-2k}$, montrer que e_{n-2k} est dans F_n.
   b) Déterminer les coordonnées de e_n et de e_{n-2} dans la base $\mathscr{B}$.
   c) Montrer que e_{2k-n} est dans F_n.
6. Pour j entier naturel avec $0 \leqslant j \leqslant n$, exprimer la dérivée f_j' en fonction de vecteurs de la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.
7. Montrer que l'application $u_n : f \mapsto f'$ réalise un endomorphisme de F_n et donner la matrice de u_n dans la base $\mathscr{B}$.
8. Soit λ un réel. Quelles sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = \lambda f$? (on pourra calculer la dérivée de $x \mapsto \exp(-\lambda x) f(x)$).
9. Montrer que les valeurs propres de u_n sont les entiers de l'ensemble

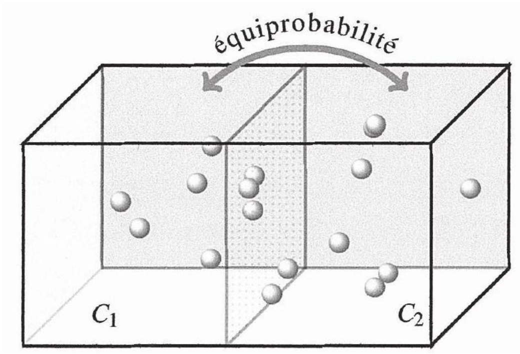
$$\{\pm n, \pm(n-2), \ldots, \pm(n-2p)\}$$

   où $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (partie entière de $\frac{n}{2}$) et qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est l'application $e_{\varepsilon(n-2k)}$.
10. La matrice B_n est-elle diagonalisable ?
11. Montrer que $\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & 1\end{pmatrix}$ est l'unique matrice $L = \begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_{n+1}\end{pmatrix}$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = 1 \quad \text{et } LA_n' = L$$

Partie II - Diffusion de particules

Une boîte contient n particules ; cette boîte est séparée en deux boîtes notées C_1 et C_2 par une membrane poreuse. On modélise le passage des particules d'une boîte à l'autre de la façon suivante. À chaque instant entier, on choisit une des n particules avec équiprobabilité et on la transfère dans l'autre boîte. Les tirages sont supposés indépendants.



On admet qu'il existe un espace probabilisé $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tel que pour tout p de $\mathbb{N}$, le nombre de particules dans la boîte C_1 à l'instant p définit une variable aléatoire X_p sur $\mathscr{E}$.
Si A est un événement élément de $\mathscr{A}$, si $0 \leqslant k \leqslant n$ et si $\mathbb{P}(X_p = k) = 0$, on pose par convention $\mathbb{P}_{[X_p=k]}(A) = 0$. Avec cette convention, on a la formule que l'on pourra admettre :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{[X_p=k]}(A)\, \mathbb{P}(X_p = k)$$

L'espérance d'une variable aléatoire X discrète finie sera notée $\mathbb{E}(X)$.
On note enfin, pour p dans $\mathbb{N}$, L_p la matrice ligne :

$$L_p = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_p = 0) & \mathbb{P}(X_p = 1) & \cdots & \mathbb{P}(X_p = n)\end{pmatrix}$$

12. Déterminer L_{p+1} en fonction de L_p en utilisant la matrice A'_n et en déduire L_p en fonction de A'_n, p et L_0.
13. On suppose dans cette question que X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
    Quelle est la loi suivie par X_p ? Quelle est son espérance et sa variance ?
    On revient au cas général.
14. Montrer que pour tout p entier naturel :
$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbb{E}(X_p) + 1$$
    et en déduire l'espérance de X_p en fonction de n, p et $\mathbb{E}(X_0)$ (on pourra étudier $\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}$).
15. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition ?
16. Une modélisation physique stipule que la pression P_p dans la boîte C_1 à l'instant p est de l'ordre de $P_p = \mathbb{E}\left(\frac{X_p}{n}\right)$.
    On note t la fréquence de transitions par seconde et on suppose que $p = nt$ (temps mis pour effectuer n transitions).
    Exprimer la limite de P_{nt} lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de t et de P_0 seulement. Ceci établit une loi de refroidissement due à Isaac Newton.