EML

Filière ECS

(Enoncé)

Partie I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
3. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout P de E, $T(P) = (X\,(X-1)\,P')'$, où l'accent désigne la dérivation.
Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$ et donc :

$$T(P) = (X\,(X-1)\,2X)' = (6X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.
5. Calculer, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$.
6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.
7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Partie III : Intervention d'un produit scalaire

On conserve les notations de la partie II.
On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
9. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(T(P), Q) = -\displaystyle\int_0^1 x\,(x-1)\,P'(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.
10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
    Quel résultat de la partie II peut-on retrouver ainsi ?
11. a) Établir : $\forall P \in E,\ \varphi(T(P), P) \geqslant 0$.
    b) Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P), P) = 0$.

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ de E ?
13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3 de la partie I, déterminer une base orthonormale $\mathscr{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.
14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endomorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que :
$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E,\ \varphi(V(P), P) \geqslant 0 \end{cases}.$$