EDHEC

Filière ECE

(Énoncé)

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
   On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left[\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)\right]$$

   b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

   c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

   d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left[\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \mathbb{P}(X_n = 4)\right]$$

   b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.

   c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = 2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n=3)+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=4) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X_n=4)+\frac{1}{3}$$
En déduire sans calcul que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n=3)=\mathbb{P}(X_n=4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:
$$U_n=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=1) & \mathbb{P}(X_n=2) & \mathbb{P}(X_n=3) & \mathbb{P}(X_n=4)\end{pmatrix}$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$:
$$\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=U_nA$$
   b) Établir par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=U_0A^n$.
   c) En déduire la première ligne de A^n.
8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A=aI+bJ$.
10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k=4^{k-1}J$.
   b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.
   c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n=0$.

Partie 4 : informatique

11. a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il affiche les 101 premières positions du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=100
X=np.ones(n+1)
for i in range(n):
    r=rd.randint(3)+1
    if r<X[i]:
        X[i+1]=r
    else:
        X[i+1]=r+1
print(X)
print(..........)
```

b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$. En quoi est-ce normal ?