ESSEC 2016

Voie S

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles. Sous réserve d'existence, on note :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ, des expressions des fonctions sin, $\dfrac{1}{\sin}$ et $\dfrac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens).
Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ [T(f)]\,(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On en déduit une expression de la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\dfrac{1}{\sin}$.

Partie I : Étude de la fonction φ.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.
   Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D.
2. Imparité et périodicité de φ :
   a) Justifier que φ est impaire.
   b) Vérifier que pour x dans D : $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$.
   c) Montrer que pour x dans D : $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
   La fonction φ est donc périodique de période 1.
3. Continuité de φ :
   a) Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0,1\}$ l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

   b) Vérifier que : $\forall x \in D,\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} - g(x)$.

c) Soit h un nombre réel de $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ |g(x+h) - g(x)| \leqslant C\,|h|$$

où : $C = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}$.

d) En déduire que g est continue sur $[0,1]$ puis que φ est continue sur $]0,1[$.
La fonction φ est donc continue sur D.

4. Étude de φ en 0 et en 1 :

a) Montrer que : $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$.

b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II : Étude de l'opérateur T

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.
T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note, pour tout entier naturel k, e_k l'élément de E défini par :

$$\forall x \in [0,1],\ e_k(x) = x^k$$

et pour tout entier naturel n, F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

6. Étude de T sur F_n :

a) Vérifier que : $\forall f \in F_n,\ T(f) \in F_n$.
On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n,\ T_n(f) = T(f)$.

b) Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n.

c) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7. Étude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2\,id_E)$:

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(T - 2\,id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
Soit f un élément de $\mathrm{Ker}(T - 2\,id_E)$. On note :

$$m = \min_{x\in[0,1]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

On fixe x_0 dans $[0,1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0,1]$ tel que $M = f(x_1)$.

b) Montrer que : $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.

d) En déduire que : $m = f(0)$.

e) Faire une étude similaire pour M.

f) Montrer alors que f est constante.

8. Étude de la fonction cot :
Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x) = \pi\,\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a) Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique de période 1.

b) Montrer que : $\cot(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que : $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{3}\, x$.

c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

d) Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D, on a : $\dfrac{x}{2} \in D$, $\dfrac{x+1}{2} \in D$ et :

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\,\cot(x).$$

9. Calcul de φ :

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\,\varphi(x)$.

b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

c) Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D,\ \pi\,\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.

10. Première application :

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - x\,\cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, on pose $\delta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) Vérifier que $\left|\delta(x) - \dfrac{x^2}{1 - x^2}\right| \leqslant x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\,(n^2 - 1)}$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

d) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[0,1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

11. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors $\beta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$.

12. Explicitation de β : on fixe un nombre réel x dans $]0,1[$.

a) Pour N entier naturel non nul, calculer $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) \mathrm{d}t$ en fonction de $\beta_N(x)$.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

c) Montrer que : $\left|\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

d) En déduire que : $\beta(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

e) Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, $\beta(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

13. Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente.
Dans la suite, on pose $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$ et on note :

$$P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$:

$$P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x).$$

c) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x. On note encore $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$.

d) Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $]-n,n[$, montrer que $P_n(x+1) = -\left(\dfrac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$.

e) En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

f) Montrer alors que, pour tout nombre réel x, $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, on pose $\lambda_n(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(xt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $v_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x}{n^2 - x^2}$.

14. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $D\cup\{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.
La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

15. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$:

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x)\, v_n(x)$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

16. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

a) Vérifier que lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$:

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

b) Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$.

c) Donner la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^\pi C_n(t)\,\mathrm{d}t$.

17. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi F(t)\,\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right) = 0.$$

18. Pour x élément de D, on définit la fonction Φ_x sur $[0,\pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xt)-1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in \left]0,\pi\right] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

b) Vérifier que, pour tout $t \in [0,\pi]$:

$$C_n(t)\,(\cos(xt)-1) = -\frac{1}{2}\,(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\,\Phi_x(t)\,\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right).$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t)\,\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + I_n.$$

19. Application :

a) Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout $x \in D$:

$$\psi(x)\,\sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

b) En déduire que, pour tout x élément de D, $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} + 2x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-x^2}$.