ESSEC

(Énoncé)

On désigne par f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
La partie II est indépendante de la partie I si on admet les résultats qui y sont montrés.

Partie I - Étude de f

1. Déterminer l'unique réel x de $]0,1[$ tel que $f(x)=0$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 à droite pour la fonction f.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction prolongée obtenue est dérivable en 0. On donnera l'équation de la tangente en 0.
4. Justifier que f est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$, pour x dans $]0,1[$, en fonction de $y = \frac{1}{\ln(x)}$ seulement.
5. En déduire l'existence et l'unicité d'un réel x_0 de $]0,1[$ que l'on précisera tel que $f'(x_0)=0$.
6. Dresser le tableau des variations de f sur $]0,1[$.
7. Justifier que pour tout x de $]0,1[$, $f(x) \leqslant x$.

Partie II - Étude d'une suite récurrente

Jusqu'à la fin de ce problème, on désigne par u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où e désigne exp(1). On admettra le résultat suivant :

> Si v et w sont deux suites réelles positives vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ et si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors :
>
> $$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} w_k$$

II.A - Résultat préliminaire

Dans cette section, α désigne un réel de $]0,1[$.

8. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

9. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$ sous la forme an^b avec a et b réels à déterminer.

II.B - Étude de la suite u

10. Montrer par récurrence la propriété « u_n est bien défini et appartient à $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ ».
11. Étudier les variations de la suite u et en déduire que cette suite converge.
12. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

II.C - Convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$

13. Si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, rappeler un équivalent de $(1+\varepsilon_n)^2 - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
14. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n)$ est équivalent à une constante strictement positive β que l'on déterminera.
15. En déduire, en utilisant le résultat encadré admis, que $\ln^2(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta n$.
16. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

II.D - Recherche d'un équivalent de u_n

Dans le reste de ce problème, on pose $v_n = \ln^2(u_n) - 2n$.

17. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ sous la forme $\dfrac{A}{n^\gamma}$ avec A et γ réels à déterminer.
18. En déduire un développement de $\ln(u_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme :

$$\ln(u_n) = a\sqrt{n} + b + \circ(1)$$

où a et b sont des réels à déterminer.

19. En déduire un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.