EML 2016

Voie S

Problème 2 (Enoncé)

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   b) En déduire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

   c) Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a :

   $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

   d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

   On pourra séparer les cas n pair et n impair.

   f) En déduire une fonction `Python` qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

   $$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

   puis :

   $$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3 :

   $$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\ \Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>-1$.

   On pose, pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$, $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

7. Soit $x\in\,]-1\,;+\infty[$. On définit la fonction $g_x:\,]0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R},\ t\mapsto\dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

   a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ g_x(t)=(-1)^n g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}$.

   b) Justifier, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :

   $$\int_0^{+\infty}t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^{x+1}}\,\Gamma(x+1).$$

   c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

   d) En déduire la relation : $I(x)=S(x+1)\,\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la partie I.

8. En utilisant la partie I, déterminer la valeur de $I(1)$.

Partie III : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$.

9. Vérifier que la fonction f est paire.

10. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

    On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

11. Déterminer la fonction de répartition de X.

12. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

    En déduire que X^n admet une espérance, que l'on note $m_n(X)$.

    b) Justifier que : $\forall p\in\mathbb{N},\ m_{2p+1}(X)=0$.

    c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

    $$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ m_{2p}(X)=4p\,I(2p-1).$$

13. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.

14. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.

    On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

    a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n.

    b) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera une densité .